

SK1104 Klassisk fysik

Lösningsförslag till tentamen

Måndagen den 16 januari, 2023, 14:00-16:30

Del A - 1p per deluppgift

1. a) Detta är en direkt tillämpning av spegelekvationen

$$\frac{1}{s} + \frac{1}{s'} = \frac{1}{f} = \frac{2}{R} \quad \text{eftersom} \quad f = \frac{R}{2}$$

Enligt uppgiften är $s = 20$ cm och $R = 50$ cm, vilket medför att $f = 25$ cm. De korrekta svarsalternativen är

3. Bilden hamnar 100 cm från spegeln.

4. Bilden är förstorad med en faktor 5.

b) Vid rumstemperatur (20 °C) är ljudfarten

$$v = \sqrt{\frac{\gamma RT}{M}} \Rightarrow v = \sqrt{\frac{1,40 \cdot 8,314 \cdot 293,15}{28,8 \cdot 10^{-3}}} \text{ m/s} = 344 \text{ m/s}$$

I ett rör med två öppna ändar, inträffar resonans när

$$L = m \cdot \frac{\lambda}{2} = m \cdot \frac{v}{2f} \Rightarrow f = m \cdot \frac{v}{2L} \Rightarrow f = m \cdot \frac{344}{2 \cdot 1,50} \text{ Hz} = m \cdot 115 \text{ Hz}$$

De två lägsta resonansfrekvenserna är således 115 Hz respektive 230 Hz (mera exakt 229 Hz).

c) Brytningsindex är förhållandet mellan ljusfarten och farten i mediet. Vi börjar därför med att bestämma utbredningsfarten i mediet. En allmän ekvation för en harmonisk vågrörelse är

$$E = A \cos(kx - \omega t + \Phi) \quad \text{där} \quad k = \frac{2\pi}{\lambda} \quad \text{och} \quad \omega = 2\pi f$$

Identifiering av detta med den givna ekvationen ger att

$$v = \frac{\omega}{k} \Rightarrow n = \frac{c}{v} = \frac{ck}{\omega} \Rightarrow n = \frac{2,997925 \cdot 10^8 \cdot 8,294 \cdot 10^6}{1,507 \cdot 10^{15}} = 1,65$$

Del B - 4p per uppgift

2. Vi börjar med att beräkna ljudintensitetsnivån på $r_1 = 1,0$ meters avstånd från den första borrhammaren. När endast den är igång uppmäts ljudintensitetsnivån till $\beta_2 = 77,2$ dB på avståndet $r_2 = 5,0$ m från densamma. Enligt definitionen av ljudintensitetsnivå gäller att

$$\beta_2 = 10 \log \frac{I_2}{I_0} = 77,2 \text{ dB}$$

Borrhammaren sänder ut ljud i alla riktningar, varför vi kan betrakta den som en punktkälla. Intensiteten från en punktkälla avtar med kvadraten på avståndet från källan, varför vi har att

$$I \propto \frac{1}{r^2} \Rightarrow \frac{I_1}{I_2} = \frac{r_2^2}{r_1^2}$$

Sätter vi ihop dessa båda ekvationer får vi att ljudintensitetsnivån β_1 på avståndet 1,0 m från borrhammaren kan skrivas

$$\beta_1 = 10 \log \frac{I_1}{I_0} = 10 \log \left(\frac{I_2}{I_0} \cdot \frac{r_2^2}{r_1^2} \right) = 10 \log \frac{I_2}{I_0} + 20 \log \frac{r_2}{r_1}$$

Insättning av värden ger att ljudintensitetsnivån på 1,0 m från den första borrhammaren är

$$\beta_1 = 77,2 + 20 \log \frac{5,0}{1,0} \text{ dB} = 91,2 \text{ dB}$$

Betrakta nu fallet med båda borrhammarna och beteckna ljudintensitetsnivån från den andra borrhammaren med β_3 och den uppmätta ljudintensitetsnivån från båda borrhammarna med β_{tot} . Eftersom borrhammarna är oberoende ljudkällor gäller att intensiteterna ska summeras vilket betyder att

$$\beta_{tot} = 10 \log \frac{I_2 + I_3}{I_0} \Rightarrow I_3 = I_0 \cdot 10^{\beta_{tot}/10} - I_2 = I_0 \cdot 10^{\beta_{tot}/10} - I_0 \cdot 10^{\beta_2/10}$$

Ljudintensitetsnivån från den andra borrhammaren på mätplatsen blir således

$$\beta_3 = 10 \log \frac{I_3}{I_0} = 10 \log \left(10^{\beta_{tot}/10} - 10^{\beta_2/10} \right)$$

På samma sätt som för den första borrhammaren gäller att ljudintensitetsnivån på 1,0 m avstånd från borrhammaren kan beräknas ur relationen

$$\beta_1 = 10 \log \frac{I_1}{I_0} = 10 \log \left(\frac{I_3}{I_0} \cdot \frac{r_3^2}{r_1^2} \right) = 10 \log \frac{I_3}{I_0} + 20 \log \frac{r_3}{r_1}$$

Sätter vi ihop dessa båda ekvationer får vi att

$$\beta_1 = 10 \log \left(10^{\beta_{tot}/10} - 10^{\beta_2/10} \right) + 20 \log \frac{r_3}{r_1}$$

Insättning av värden ger

$$\beta_1 = 10 \log \left(10^{78,4/10} - 10^{77,2/10} \right) + 20 \log \frac{18,0}{1,0} \text{ dB} = 97,3 \text{ dB}$$

3. Sändaren sänder ut mikrovågor med frekvensen 5,8 GHz. Eftersom elektromagnetiska vågor inte kräver ett medium för sin utbredning beror dopplereffekten endast på den relativa farten mellan objekt och sensor. Enligt uttrycket för den relativistiska dopplereffekten blir den frekvens som uppfattas av ett objekt i rörelse:

$$f' = \sqrt{\frac{c+v}{c-v}} \cdot f_0$$

där c är ljusfarten i vakuum och f_0 är den utsända frekvensen. På motsvarande sätt blir den reflekterade frekvensen från objektet även den dopplerröskjuten. Frekvensen hos ekot som kommer tillbaka till HF-sensorn är således

$$f'' = \sqrt{\frac{c+v}{c-v}} \cdot f' = \frac{c+v}{c-v} \cdot f_0$$

Vi löser ut objektets fart v från denna ekvation, vilket ger att

$$cf'' - vf'' = cf_0 + vf_0 \Rightarrow v = \frac{f'' - f_0}{f'' + f_0} \cdot c \approx \frac{c}{2} \cdot \frac{\Delta f}{f}$$

Av texten i uppgiften framgår att ekot och den utsända signalen överlagras vid detekteringen av signalen. Då uppkommer en svävning och denna svävning kommer att ha en svävningsfrekvens. Enligt uppgiften kan sensorn detektera periodtider i signalen på upp till 2,0 s, vilket då kommer att motsvara den minsta frekvensskillnad som kan detekteras hos svävningen. Detta ger att

$$\Delta f = |f'' - f_0| = \frac{1}{T} \Rightarrow \Delta f = \frac{1}{2,0} \text{ Hz} = 0,50 \text{ Hz}$$

Vi får då att då att den minsta fart hos objektet som kan detekteras är

$$v = \frac{2,9979 \cdot 10^8}{2} \cdot \left(\frac{0,50}{5,8 \cdot 10^9} \right) \text{ m/s} = 1,3 \text{ cm/s}$$

4. a) Med hjälp av brytningslagen kan vi börja med att beräkna brytningsvinkeln inuti de parallella glasplattorna.

$$n_0 \sin \theta_i = n_g \sin \theta_b \Rightarrow \theta_b = \arcsin \left(\frac{n_0 \sin \theta_i}{n_g} \right)$$

Insättning med $\theta_i = \theta = 54^\circ$ och $n_0 = 1,00$ (för luft) ger att

$$\theta_b = \arcsin \left(\frac{1,00 \cdot \sin 54^\circ}{1,62} \right) = 29,96^\circ$$

Vi följer strålen och räknar först ut vad som händer vid reflektionen mot den första ytan. Låt det opolariserade ljuset som faller in mot den första glasplattan ha intensiteten I_0 . Detta ljus kan delas upp i två lika stora delar som vardera har intensiteten $I_0/2$ och där den ena är polariserad i infallsplanet (index p) och den andra är polariserad vinkelrätt mot infallsplanet (index s). Fresnels formler på första ytan ger att reflektansen för vardera komponenten är:

$$R_p = \frac{I_{rp}}{I_{ip}} = \left(\frac{\tan(\theta_i - \theta_b)}{\tan(\theta_i + \theta_b)} \right)^2 \quad \text{och} \quad R_s = \frac{I_{rs}}{I_{is}} = \left(\frac{\sin(\theta_i - \theta_b)}{\sin(\theta_i + \theta_b)} \right)^2$$

Vidare gäller att transmission $T = 1 - R$, varför insättning ger att

$$R_p = \left(\frac{\tan(54^\circ - 29,96^\circ)}{\tan(54^\circ + 29,96^\circ)} \right)^2 = 0,00223 \Rightarrow T_p = 0,99777$$

$$R_s = \left(\frac{\sin(54^\circ - 29,96^\circ)}{\sin(54^\circ + 29,96^\circ)} \right)^2 = 0,1678 \Rightarrow T_s = 0,8322$$

Vid den andra ytan hos den första glasbiten, får vi på motsvarande sätt att

$$R_p = \left(\frac{\tan(29,96^\circ - 54^\circ)}{\tan(29,96^\circ + 54^\circ)} \right)^2 = 0,00223 \Rightarrow T_p = 0,99777$$

$$R_s = \left(\frac{\sin(29,96^\circ - 54^\circ)}{\sin(29,96^\circ + 54^\circ)} \right)^2 = 0,1678 \Rightarrow T_s = 0,8322$$

Den andel av intensiteten som passerar genom den första glasplattan blir således

$$T_{1p} = T_p^2 = (1 - R_p)^2 \quad \text{sam} \quad T_{1s} = T_s^2 = (1 - R_s)^2$$

Eftersom den utgående strålen är parallell med den inkommande strålen mot första glasplattan, kommer de övriga glasplattorna att ge exakt samma förändring av intensiteten. Sätter vi samman detta får vi att

$$T_{tot,p} = \left((1 - R_p)^2 \right)^5 = (1 - R_p)^{10} \Rightarrow T_{tot,p} = 0,9779$$

$$T_{tot,s} = \left((1 - R_s)^2 \right)^5 = (1 - R_s)^{10}, \Rightarrow T_{tot,s} = 0,1593$$

Polariseringsgraden blir slutligen

$$P = \frac{0,9779 - 0,1593}{0,9779 + 0,1593} = 0,72$$

b) Från den givna ekvationen ser vi att polarisationsgraden blir högre ju större skillnad det är mellan I_p och I_s (två uppenbara gränssfall är att $P = 0$ när $I_p = I_s$ och $P = 1$ när $I_s = 0$). Några exempel på metoder att öka polarisationsgraden P är således att

i) Öka antalet glasplattor. Med exempelvis 10 parallella glasplattor fås att:

$$T_{tot,p} = \left((1 - R_p)^2 \right)^{10} = (1 - R_p)^{20} \Rightarrow T_{tot,p} = 0,9562$$

$$T_{tot,s} = \left((1 - R_s)^2 \right)^{10} = (1 - R_s)^{20}, \Rightarrow T_{tot,s} = 0,0254$$

varvid polariseringsgraden blir

$$P = \frac{0,9562 - 0,0254}{0,9562 + 0,0254} = 0,95$$

ii) Ändra infallsvinkeln så att den motsvarar Brewstervinkeln, vilken för en glasbit med brytningsindex 1,62 ges av

$$\tan \theta_i = \frac{n_2}{n_1} \quad \theta_i = \arctan \frac{1,62}{1,00} = 58,3^\circ$$

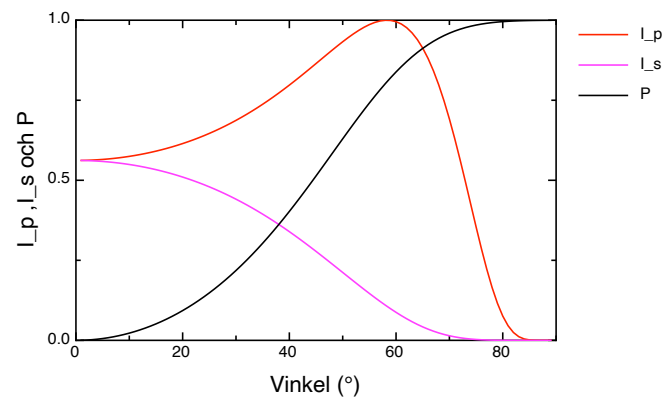
I detta fallet fås att brytningsvinkeln är $\theta_b = 31,7^\circ$ och

$$R_p = 0 \Rightarrow T_p = 1$$

$$R_s = \left(\frac{\sin(58,3^\circ - 31,7^\circ)}{\sin(58,3^\circ + 31,7^\circ)} \right)^2 = 0,2009 \Rightarrow T_s = 0,7991$$

Med 5 glasplattor blir då

$$T_{tot,p} = 1 \quad \text{sam} \quad T_{tot,s} = 0,1062 \Rightarrow P = \frac{1 - 0,1062}{1 + 0,1062} = 0,81$$



Graf över hur I_p , I_s och P varierar som funktion av infallsvinkel θ_i med 5 parallella glasplattor.