



SF1681 Linjär algebra, fk
Tentamen
10 januari 2024

Skrivtid: 14:00-19:00

Tillåtna hjälpmedel: inga

Examinator: Mats Boij

Bonuspoäng av typ I adderas till erhållna poäng på del I upp till maximalt 12 poäng och bonuspoäng av typ II adderas till erhållna poäng på del II upp till maximalt 8 poäng. Betygsgränserna vid tentamen kommer att ges av följande tabell.

Del	Poäng	Innehåll	Fx	E	D	C	B	A
II	8	Begrepp och satser	4	4	4	6	6	6
Total	36		11	12	18	22	26	30

För full poäng på en uppgift krävs att lösningen är väl presenterad och lätt att följa.

DEL I – GRUNDLÄGGANDE PROBLEM

1. Låt $V = \mathbb{C}[x]$ vara vektorrummet av polynom i en variabel med komplexa koefficienter. Låt för heltal $n \geq 0$ operatoren $L_n: V \rightarrow V$ definieras av

$$L_n(p(x)) = p(x) - \sum_{k=0}^n \frac{p^{(k)}(0)}{k!} x^k,$$

för alla $p(x) \in V$.

- (a) Visa att L_n är linjär för alla $n \geq 0$. (1 p)
 - (b) Bestäm baser för kärnan $\ker(L_n)$ och bildrummet $\operatorname{im}(L_n)$ till L . (2 p)
 - (c) Avgör om $\ker(L_n) \oplus \operatorname{im}(L_n) = V$ som inre direkt summa. (1 p)
2. Låt $V = \mathbb{C}[x]$ vara inre-produktrummet som består av polynom med komplexa koefficienter med inre produkten definierad som

$$\langle p(x) | q(x) \rangle = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \overline{p(x)} q(x) dx$$

för $p(x), q(x) \in V$. Låt $V_n = \operatorname{Span}\{1, x, \dots, x^n\}$ för heltal $n \geq 0$.

- (a) Bestäm en ortogonal bas för V_3 . (2 p)
 - (b) Bestäm den ortogonala projektionen av x^k på V_2 för alla $k \geq 0$. (2 p)
3. Låt $\mathbb{F}_5 = \{0, \pm 1, \pm 2\}$ vara kroppen med fem element. Välj en matris A i $M_{2,2}(\mathbb{F}_5)$ sådan att $K = \{aI + bA : a, b \in \mathbb{F}_5\}$ bildar en kropp med 25 element och bestäm alla lösningarna till ekvationen $x^3 = 1$ i K . (4 p)

DEL II – BEGREPP OCH SATSER

4. (a) Definiera vad som menas med en *adjungerad* linjär avbildning. (1 p)
 (b) Visa att $\ker L^\dagger = (\operatorname{im} L)^\perp$ om $L: V \longrightarrow W$ är en linjär avbildning mellan inre produktrum. (2 p)
 (c) Ge ett exempel som visar att det inte alltid gäller att $U \oplus U^\perp = V$ om U är ett delrum av ett inre produktrum V . (1 p)
5. (a) Definiera vad som menas med *egenvektor* och *generaliserad egenvektor* till en linjär operator. (1 p)
 (b) Ge exempel på en linjär operator med en generaliserad egenvektor som inte är en egenvektor. (1 p)
 (c) Formulera satsen om Jordans normalform i fallet då operatoren är nilpotent. (1 p)
 (d) Bestäm vilka värden som är möjliga för rangen av en 5×5 -matris N som uppfyller att $N^2 = 0$. (1 p)

DEL III – AVANCERADE PROBLEM

6. Låt $V = \mathbb{C}^3$ och låt $L: V \longrightarrow V$ ges av $L(x_1, x_2, x_3) = (x_3, x_1, x_2)$.
 (a) Visa att detta ger en linjär avbildning $L \otimes L: V \otimes V \longrightarrow V \otimes V$. (1 p)
 (b) Bestäm egenvärden och egenrum för $L \otimes L$. (3 p)

7. Bestäm en Hermitesk matris A_θ som uppfyller

$$\exp(iA_\theta) = \begin{bmatrix} i \sin \theta & \cos \theta \\ \cos \theta & i \sin \theta \end{bmatrix},$$

där θ är ett reellt tal.

(4 p)

8. Låt V vara ett ändligdimensionellt vektorrum över en kropp k och låt $W \subseteq V \otimes V$ vara det linjära höljet till $S = \{\mathbf{x} \otimes \mathbf{x} : \mathbf{x} \in V\}$. Visa att $(V \otimes V)/W$ är isomorft med $\bigwedge^2 V$. (4 p)

9. För två kommuterande kvadratiske matriser A och B låt

$$V_{A,B} = \operatorname{Span}\{A^i B^j, \quad i, j \geq 0\}.$$

Bestäm det största och det minsta möjliga värdet för $\dim V_{A,B}$ då A och B är kommuterande matriser i $M_{2,2}(\mathbb{C})$. (4 p)