



Lösningsförslag till tentamen
9 januari 2020

DEL I – GRUNDLÄGGANDE PROBLEM

1. Låt $V = P_{10}$ vara vektorrummet av polynom av grad högst 10 med komplexa koefficienter (kallas $\mathbb{C}_{10}[x]$ i kursboken). Definiera $L: V \rightarrow V$ genom $L(p(x)) = xp'(x) + p(1)$. Bestäm alla egenvärden och egenrum till L . Är L diagonaliserbar? **(4 p)**

Lösningsförslag. Vi väljer basen $1, x, x^2, \dots, x^{10}$ för V . Vi har att $L(x^d) = dx^d + 1$ så matrisen för L är

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & & 0 \\ \vdots & & & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 10 \end{bmatrix}.$$

Eftersom matrisen är övertriangulär så är egenvärdena $\{1, 2, 3, \dots, 10\}$. Låt λ vara ett egenvärde och låt $p(x) = \sum_{i=0}^{10} a_i x^i$ vara en egenvektor med egenvärde λ . Vi har att

$$L(p(x)) = (a_0 + a_1 + \cdots + a_{10}) + \sum_{i=1}^{10} i a_i x^i$$

$$\lambda p(x) = \lambda a_0 + \sum_{i=1}^{10} \lambda a_i x^i$$

så vi ser att $a_i = 0$ för alla $i \neq 0, \lambda$. Alltså är $p(x) = a_0 + a_\lambda x^\lambda$ med $a_0 + a_\lambda = \lambda a_0$, dvs $a_\lambda = (\lambda - 1)a_0$. Detta ger det endimensionella egenrummet:

$$E_\lambda = \text{Span}\{1 + (\lambda - 1)x^\lambda\}.$$

Spannet av alla egenrummen är $\text{Span}\{1, 1+x^2, 1+2x^3, \dots, 1+9x^{10}\}$ vilket inte innehåller x . Alltså är L ej diagonaliserbar.

Svar. Egenvärdena är $\{1, 2, 3, \dots, 10\}$ med endimensionella egenrum (se lösning). Operatör är inte diagonaliserbar.

2. Låt $V = C^\infty([0, 1])$ vara de oändligt deriverbara komplexvärda funktionerna på $[0, 1]$ med inre produkt

$$\langle f|g \rangle = \int_0^1 \overline{f(t)}g(t) dt, \quad \text{för alla } f, g \text{ i } V.$$

Låt $L: V \longrightarrow V$ ges av $L(f(t)) = f(t)e^{it}$. Är L självdjungerad? Är L unitär? **(4 p)**

Lösningsförslag. Vi har att

$$\langle f|L(g) \rangle = \int_0^1 \overline{f(t)}g(t)e^{it} dt = \int_0^1 \overline{f(t)e^{-it}}g(t) dt$$

så $L^\dagger(f) = f(t)e^{-it}$. Eftersom $L \neq L^\dagger$ så är L inte självdjungerad. Däremot observerar vi att $L^\dagger L = I = LL^\dagger$, dvs $L^{-1} = L^\dagger$ och alltså är L unitär.

Svar. L är unitär men inte självdjungerad.

3. Låt $V = \mathbb{C}^3$ och låt $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & -3 \\ -2 & 3 & 0 \end{bmatrix}$.

- (a) Visa att det finns en unik linjär avbildning $L: \bigwedge^2 V \longrightarrow \mathbb{C}$ sådan att $L(x \wedge y) = x^T A y$ för alla $x, y \in V$. **(2 p)**
 (b) Bestäm en bas för kärnan till L . **(2 p)**

Lösningsförslag.

- (a) Eftersom A är antisymmetrisk så ger $(x, y) \mapsto x^T A y$ en alternerande bilinjär avbildning $V \times V \longrightarrow \mathbb{C}$ och därmed en unik linjär avbildning $x \wedge y \mapsto x^T A y$. Explicit har vi basen $e_{12} := e_1 \wedge e_2$, $e_{13} := e_1 \wedge e_3$, $e_{23} := e_2 \wedge e_3$ för $\bigwedge^2 V$ och

$$L(e_{12}) = 1, \quad L(e_{13}) = 2, \quad L(e_{23}) = -3.$$

- (b) Eftersom L inte är nollavbildningen så är L surjektiv och kärnan alltså tvådimensionell. Per inspektion ser vi att en bas för kärnan ges av:

$$\begin{aligned} b_1 &= 2e_{12} - e_{13} = e_1 \wedge (2e_2 - e_3) \\ b_2 &= 3e_{12} + e_{23} = e_2 \wedge (-3e_1 + e_3). \end{aligned}$$

DEL II – BEGREPP OCH SATSER

4. (a) Låt V vara ett vektorrum och W ett delrum. Låt $v_1, v_2 \in V$ vara två vektorer. När är $q(v_1) = q(v_2)$ där $q: V \rightarrow V/W$ är kvotavbildningen? **(1 p)**
- (b) Låt $L: V \rightarrow U$ vara en linjär avbildning mellan vektorrum. Formulera *isomorfi-satsen* för L (den säger något om L och kvotrum). **(1 p)**
- (c) Låt V vara ett ändligtdimensionellt inre-produktrum och W ett delrum. Definiera en avbildning Φ mellan $W^\perp$ och V/W och visa att Φ är en isomorfi. **(2 p)**

Lösningsförslag.

- (a) $q(v_1) = q(v_2)$ inträffar precis när $q(v_1 - v_2) = 0$, dvs då $v_1 - v_2 \in W$ eftersom $\ker q = W$.
- (b) $\operatorname{im}(L) \cong V / \ker L$.
- (c) Inklusionen $W^\perp \subseteq V$ följer av kvotavbildningen q ger en linjär avbildning $\Phi: W^\perp \rightarrow V/W$. Att Φ är injektiv är det samma som att $W \cap W^\perp = 0$. Detta är sant eftersom $\langle w|w \rangle = 0$ medför att $w = 0$. För att se att Φ är surjektiv, ta en vektor $v \in V$ och låt $w = P_W(v)$ vara den ortogonala projektionen av v på W . Om W har den ortonormala basen $e_1, e_2, \dots, e_n$ så är

$$P_W(v) = \sum_i \langle v|e_i \rangle e_i.$$

Då är $v - w \in W^\perp$ och $\Phi(v - w) = (v - w) + W = v + W$.

Alternativt kan vi börja med den ortogonala projektionen $P_{W^\perp}: V \rightarrow W^\perp$ (observera att $P_{W^\perp} = I - P_W$). Kärnan till $P_{W^\perp}$ är W och enligt isomorfi-satsen har vi alltså en isomorfi $\Psi: V/W \rightarrow \operatorname{im}(P_{W^\perp})$. Men bilden är $W^\perp$ eftersom $P_{W^\perp}(W^\perp) = W^\perp$.

Kommentar: Om W är oändligtdimensionellt så är inte alltid $W^\perp$ och V/W isomorfa. Låt t ex $V = C(\mathbb{R})$ vara vektorrummet av kontinuerliga funktioner $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sådana att $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)^2 dx < \infty$ med inre produkt $\langle f|g \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)g(x) dx$ och låt W vara delrummet av funktioner med kompakt stöd. Då är $W^\perp = 0$ men $V/W \neq 0$. I detta exempel finns det ingen ortogonal projektion P_W .

5. Låt V vara ett ändligtdimensionellt komplext inre-produktrum och L en operator på V .
- (a) Vad menas med den *adjungerade operatoren* $L^\dagger$ till L ? Vad innebär det att L är *självadjungerad*? (1 p)
 - (b) Visa att om L är självadjungerad så har V en ortogonal bas bestående av egenvektorer till L . *Tips: använd induktion på $\dim V$.* (2 p)
 - (c) Ge ett exempel på ett inre-produktrum V som ovan med en operator L som har en ortogonal bas av egenvektorer men som inte är självadjungerad. (1 p)

Lösningsförslag.

- (a) $L^\dagger$ är den operator som uppfyller $\langle L^\dagger(x)|y \rangle = \langle x|L(y) \rangle$ för alla $x, y \in V$. Operatoren L är självadjungerad om $L = L^\dagger$.
- (b) Låt $n = \dim V$. Vi använder induktion på n . För $n = 1$ ger vilken vektor som helst en ortogonal bas. Antag att påståendet är sant för alla vektorrum av dimension $n - 1$. Låt λ vara ett egetvärde och ξ en motsvarande egenvektor. Välj en ortonormal bas $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n\}$ med $\mathbf{b}_1 = \xi$. Då är $L(\mathbf{b}_1) = \lambda\mathbf{b}_1$ och alltså ortogonal mot $\mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_n$. Vidare är $L(\mathbf{b}_i)$ ortogonal mot $\mathbf{b}_1$ för alla $i \geq 2$ eftersom

$$\langle L(\mathbf{b}_i)|\mathbf{b}_1 \rangle = \langle \mathbf{b}_i|L(\mathbf{b}_1) \rangle = \lambda \langle \mathbf{b}_i|\mathbf{b}_1 \rangle = 0.$$

Matrisen för L i basen $\mathcal{B}$ blir alltså på block-formen:

$$[L]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & A \end{bmatrix}$$

där A är Hermitesk. Genom induktionsantagandet så finns en ortogonal bas av egenvektorer för A , dvs en ortogonal bas för $\text{Span}\{\mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_n\}$ bestående av egenvektorer till L . Tillsammans med $\mathbf{b}_1$ ger detta en ortogonal bas av egenvektorer.

- (c) En ortogonalt diagonaliserbar operator är självadjungerad precis när den har reella egenvärden. Ett exempel på en ortogonalt diagonaliserbar operatorer som inte är självadjungerad är därför operatoren på $\mathbb{C}^2$ svarande mot diagonalmatrisen

$$\begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ett annat exempel är rotationsmatrisen

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

som är ortogonal men inte symmetrisk.

DEL III – AVANCERADE PROBLEM

6. Låt A vara 4×4 -matrisen med element i $\mathbb{Z}_2$ (dvs heltalen modulo 2) som ges av:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Låt S vara delrummet av 4×4 -matriser som ges av $S = \{p(A) : p(x) \text{ är ett polynom med koefficienter i } \mathbb{Z}_2\}$. Bestäm antalet element i S . Utgör S en kropp? **(4 p)**

Lösningsförslag. S är inget annat än delrummet av 4×4 -matriser som spänns upp av $I, A, A^2, \dots$. För att hitta en bas bestämmer vi minimalpolynomet till A . Vi beräknar först A^2 :

$$A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Vi observerar att $A^2 + A + I = 0$. Alltså delar $p(x) = x^2 + x + 1$ minimalpolynomet. Men $p(x)$ har inga rötter och är alltså irreducibelt. Därför är $p(x)$ minimalpolynomet.

Detta innebär att $A^2, A^3, \dots$ är linjärkombinationer av I och A . Vi kan alltså skriva $S = \{aI + bA : a, b \in \mathbb{Z}_2\}$. Eftersom I och A är linjärt oberoende så har S dimension 2 över $\mathbb{Z}_2$ och består av 4 stycken element.

Eftersom minimalpolynomet är irreducibelt av grad 2 så är S den unika kroppen med $2^2 = 4$ element enligt sats i kursmaterialet.

Svar. S är en kropp med fyra element.

7. Låt $x_0, x_1, x_2, \dots$ vara en följd av heltal som uppfyller att $x_0 = -5$ och $x_1 = 2$ samt att $x_n = -2x_{n-1} - x_{n-2}$ för $n \geq 2$. Bestäm x_{2020} . **(4 p)**

Lösningsförslag. Vi skriver rekursionsekvationen på matrisform:

$$\begin{bmatrix} x_n \\ x_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{n-1} \\ x_{n-2} \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} x_{n-1} \\ x_{n-2} \end{bmatrix}.$$

Den karakteristiska ekvationen till A är $(x+2)x+1 = (x+1)^2$. Eftersom A inte är identitetsmatrisen så är A ej diagonaliserbar utan har Jordans normalform $\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$. Detta innebär att vi kan skriva $A = -I + N$ där $N^2 = 0$. Vi beräknar

$$N = A + I = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Detta ger

$$A^n = (-I + N)^n = (-1)^n I + (-1)^{n-1} n N = (-1)^n \begin{bmatrix} 1+n & n \\ -n & 1-n \end{bmatrix}$$

och alltså

$$\begin{bmatrix} x_{2020} \\ x_{2019} \end{bmatrix} = A^{2019} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2020 & -2019 \\ 2019 & 2018 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6055 \\ -6052 \end{bmatrix}.$$

Svar. $x_{2020} = 6055$.

8. Låt P_1 vara vektorrummet av polynom av grad högst 1 med reella koefficienter. Vi ger P_1 och $P_1 \otimes P_1$ de inre produkterna som bestäms av:

$$\langle p_1 | p_2 \rangle = p_1(0)p_2(0) + p_1'(0)p_2'(0), \quad \text{för alla } p_1, p_2 \in P_1,$$

$$\langle p_1 \otimes q_1 | p_2 \otimes q_2 \rangle = \langle p_1 | p_2 \rangle \langle q_1 | q_2 \rangle, \quad \text{för alla } p_1, q_1, p_2, q_2 \in P_1.$$

Låt $L: P_1 \otimes P_1 \rightarrow P_1$ vara den linjära avbildning som uppfyller $L(p \otimes q) = pq' + p(0)q$.

- (a) Bestäm ortonormala baser till P_1 och $P_1 \otimes P_1$ och bestäm matrisen för L med avseende på dessa baser. **(1 p)**
- (b) Bestäm singularvärdena till L samt höger- och vänstersingularvektorer till det största singularvärdet. **(3 p)**

Lösningsförslag.

- (a) Vi har den ortonormala basen $\{1, x\}$ för P_1 och $\{1 \otimes 1, x \otimes 1, 1 \otimes x, x \otimes x\}$ för $P_1 \otimes P_1$. Vi har att $L(1 \otimes 1) = 1$, $L(x \otimes 1) = 0$, $L(1 \otimes x) = 1 + x$, och $L(x \otimes x) = x$. Matrisen för L blir alltså

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

- (b) Singularvärdena ges som kvadratrötterna till egenvärdena hos $A^T A$ eller AA^T (singularvärdet 0 kan saknas i en av dessa). Enklast blir att betrakta AA^T :

$$AA^T = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

vilket har karakteristiskt polynom $(x - 2)^2 - 1 = (x - 1)(x - 3)$. Alltså har vi singularvärdena 1 och $\sqrt{3}$. Eftersom kärnan är icke-trivial har vi också singularvärdet 0. Alternativt kan vi beräkna

$$A^T A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

som har karakteristiskt polynom $x^2(x - 1)(x - 3)$. Vänstersingularvektorerna till $\sqrt{3}$ ges av $(AA^T - 3I)\xi = 0$ vilket har lösningen $\xi = (1, 1)$ eller, normerad,

$$\xi = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Motsvarande (normerade) högersingularvektor är

$$\frac{1}{\sqrt{3}} A^T \xi = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Dvs $\frac{1}{\sqrt{2}}(1 + x)$ (vänster) och $\frac{1}{\sqrt{6}}(1 \otimes 1 + 2(1 \otimes x) + x \otimes x)$ (höger).

Svar.

- (a) Ortonormala baser: $\{1, x\}$ och $\{1 \otimes 1, x \otimes 1, 1 \otimes x, x \otimes x\}$ samt matris för L :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

- (b) Singularvärden: 0, 1, $\sqrt{3}$. Singulara vektorer för $\sqrt{3}$: $\frac{1}{\sqrt{6}}(1, 0, 2, 1)$ (höger) och $\frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1)$ (vänster).

9. Låt V vara ett komplext vektorrum av dimension n och L en operator på V . Visa att L är diagonaliserbar om och endast om minimalpolynomet $q_L(t)$ är en produkt av distinkta linjära faktorer, dvs om och endast om

$$q_L(t) = \prod_{i=1}^r (t - \lambda_i)$$

för något heltal r och $\lambda_i \neq \lambda_j$ för alla $i \neq j$. (4 p)

Lösningsförslag. Låt $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ vara egenvärdena till L . Eftersom egenvärdena alltid är rötter till minimalpolynomet så delar polynomet

$$p(t) := \prod_{i=1}^r (t - \lambda_i)$$

minimalpolynomet $q_L(t)$. Vi ska visa att $q_L(t) = p(t)$ precis när L är diagonaliserbar.

Om L är diagonaliserbar så kan vi välja en bas av egenvektorer. Detta ger $V = V_1 \oplus V_2 \oplus \dots \oplus V_r$ där $V_i = E_{\lambda_i}$ är egenrummet för egenvärdet λ_i . Notera att L inducerar en operator $L_i = L|_{V_i}: V_i \rightarrow V_i$ för alla i . Det räcker att visa att $p(L) = 0$ eller ekvivalent att $p(L_i) = 0$ för alla i . Men det är klart eftersom $L - \lambda_i I = 0$ på V_i .

Om istället $q_L(t) = p(t)$ så låter vi $V_i = \tilde{E}_{\lambda_i}$ vara det generaliserade egenrummet för egenvärdet λ_i . Jordans normalform ger att $V = V_1 \oplus V_2 \oplus \dots \oplus V_r$ och att $L(V_i) \subseteq V_i$ så att L inducerar en operator $L_i = L|_{V_i}$ som ovan. Eftersom L_i endast har egenvärdet λ_i så är $L_i - \lambda_j I$ inverterbar för alla $j \neq i$. Enligt antagandet är $0 = q(L_i) = \prod_{j=1}^r (L_i - \lambda_j I)$ och alltså kan vi dra slutsatsen att $L_i - \lambda_i I = 0$. Dvs, L_i är diagonal och vi har diagonaliserat L .

Kommentar: Påståendet i uppgiften är sant även för vektorrum över andra kroppar än de komplexa talen. Vi har bara använt de komplexa talen när vi använder Jordans normalform. Boken formulerar satsen om Jordans normalform för komplexa vektorrum och satsen är inte sann för vektorrum över en godtycklig kropp. Men över en godtycklig kropp medför antagandet $q_L(t) = p(t)$ att det karakteristiska polynomet till L har n rötter räknat med multiplicitet. Beviset av Jordans normalform går därför att genomföra. Speciellt kan vi välja en bas i vilken matrisen för L får block-diagonal form där det i te blocket är en övertriangulär matris med λ_i på diagonalen. Detta visar att $V = V_1 \oplus V_2 \oplus \dots \oplus V_r$.