



**Lösningsförslag till tentamen
Torsdag den 20 oktober 2022**

DEL I – GRUNDLÄGGANDE PROBLEM

1. Bestäm det största och det minsta värdet av funktionen

$$f(x) = \arcsin(3x) + 2\sqrt{1-9x^2}$$

på intervallet $-\frac{1}{3} \leq x \leq \frac{1}{3}$.

(4 p)

Lösningsförslag. Först beräknar vi stationära punkter:

Första derivatan är $f'(x) = \frac{3-18x}{\sqrt{1-9x^2}}$.

$f'(x) = 0$ om och endast om $x = \frac{1}{6}$.

För $x \in (-\frac{1}{3}, \frac{1}{6})$ är $f'(x) > 0$, och för $x \in (\frac{1}{6}, \frac{1}{3})$ är $f'(x) < 0$. Enligt satsen i häftet, detta implicerar att f är växande i $(-\frac{1}{3}, \frac{1}{6})$ och avtagande i $(\frac{1}{6}, \frac{1}{3})$. Detta innebar att $x = \frac{1}{6}$ är lokalt max punkt.

Nu beräknar vi f i punkter $x = -\frac{1}{3}$, $x = \frac{1}{6}$ och $x = \frac{1}{3}$:

$$f(-\frac{1}{3}) = \arcsin(-1) = -\frac{\pi}{2};$$

$$f(\frac{1}{3}) = \arcsin(1) = \frac{\pi}{2};$$

$$f(\frac{1}{6}) = \arcsin(\frac{1}{2}) + \sqrt{3} = \frac{\pi}{6} + \sqrt{3}.$$

Vi observerar det $\frac{\pi}{3} < \sqrt{3}$, vilket implicerar det $\frac{\pi}{2} < \frac{\pi}{6} + \sqrt{3}$.

Det följer att $-\frac{\pi}{2}$ är det minsta värdet av f , och $\frac{\pi}{6} + \sqrt{3}$ är det största värdet av f .

□

2. Beräkna arean $A(b)$ av det område i xy -planet som begränsas av x -axeln, de vertikala linjerna $x = 0$, $x = b$ (där $b > 0$) och kurvan $y = x \cdot (x^2 + 2)^{-\frac{3}{2}}$. Visa sedan att $\lim_{b \rightarrow \infty} A(b)$ existerar samt beräkna detta gränsvärde. **(4 p)**

Lösningförslag. $A(b) = \int_0^b x \cdot (x^2 + 2)^{-\frac{3}{2}} dx = \frac{1}{2} \int_0^b \cdot (x^2 + 2)^{-\frac{3}{2}} d(x^2 + 2) = \frac{1}{2} \frac{(x^2 + 2)^{-\frac{1}{2}}}{-\frac{1}{2}} \Big|_0^b =$
 $\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{b^2 + 2}}.$
 $\lim_{b \rightarrow \infty} A(b) = \frac{1}{\sqrt{2}}.$

□

3. Avgör om följande integraler/serier är konvergenta eller divergenta:

(a) $\int_0^{\infty} \frac{dx}{1+e^{2x}}$ (1 p)

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{1+n^2}$ (1 p)

(c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{1+n^2}$ (1 p)

(d) $\int_1^5 \frac{dx}{\sqrt{x-1}}$ (1 p)

Lösningsförslag. a) Från $1+e^{2x} > e^{2x}$, olikheten $\frac{1}{1+e^{2x}} < e^{-2x}$ håller för $x \in [0, \infty)$. Också $1+e^{2x} > 0$ och $e^{-2x} > 0$ för $x \in [0, \infty)$.

Nästa, beräknar vi $\int_0^{\infty} e^{-2x} dx = \frac{-1}{2} \int_0^{\infty} e^{-2x} d(-2x) = \frac{-1}{2} e^{-2x} \Big|_0^{\infty} = \frac{-1}{2} (\lim_{x \rightarrow \infty} e^{-2x} - e^{-2 \cdot 0}) = \frac{1}{2}$.

Detta implicerar att $\int_0^{\infty} e^{-2x} dx$ är konvergent. Enligt jämförelsesatsen är $\int_0^{\infty} \frac{dx}{1+e^{2x}}$ också konvergent.

b) Vi använder Leibnitz konvergens test. Låt $a_n = \frac{n}{1+n^2}$. För att använda Leibnitz test vi behöver att kontrollera att (a_n) är positiv och avtagande talföljd som konvergerar mot 0.

$a_n > 0$ för alla n för att $n > 0$ och $1+n^2 > 0$.

a_n är avtagande för att $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{n+1}{1+(n+1)^2}}{\frac{n}{1+n^2}} = \frac{n+n^3+n^2+1}{2n+n^3+2n^2} < 1$ för alla n .

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{1+n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1/n+n} = 0$. Därför $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

Enligt Leibnitz test är serien konvergent.

c) Vi har det $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{1+n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{1+n^2} = 1$. Och $\sum \frac{1}{n}$ är divergent enligt satsen i häftet. Enligt jämförelsesatsen II vi har det $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{1+n^2}$ är också divergent.

d) Vi använder substitution:

$\int_1^5 \frac{dx}{\sqrt{x-1}} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 1} \int_{\varepsilon}^5 \frac{dx}{\sqrt{x-1}} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 1} \int_{\varepsilon-1}^4 \frac{du}{\sqrt{u}} = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \int_{\alpha}^4 \frac{du}{\sqrt{u}} = \lim_{\alpha \rightarrow 0} 2\sqrt{u} \Big|_{\alpha}^4 = \lim_{\alpha \rightarrow 0} (4 - 2\sqrt{\alpha}) = 4$.

Detta innebar att generaliserade integralen är konvergent.

□

4. (a) Låt $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ vara kontinuerlig. Har f en primitiv funktion? Definera vad som menas med att f har primitiv funktion. (1 p)

- (b) Funktionen u defineras som

$$u(x) = \int_0^x \frac{t}{\sin t} dt.$$

Beräkna

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} u(x) \cdot \cos(2x) dx.$$

(3 p)

Lösningsförslag. a) Enligt analysens huvudsats om f är kontinuerlig då har f en primitiv. Kolla i häftet för definition av primitiv.

- b) Om vi definierar

$$g(t) = \begin{cases} \frac{t}{\sin t}, & t \neq 0 \\ 1, & t = 0 \end{cases}$$

då är $g(t)$ kontinuerlig och $\int_0^x g(t) dt = \int_0^x \frac{t}{\sin t} dt$.

Enligt analysens huvudsats: $\frac{d}{dx} u(x) = g(x)$.

För att beräkna integralen använder vi partiell integration:

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} u(x) \cdot \cos(2x) dx &= \frac{1}{2} u(x) \cdot \sin(2x) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} g(x) \cdot \sin(2x) dx \\ &= -\frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x}{\sin x} \cdot \sin(2x) dx \\ &= -\frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x}{\sin x} \cdot 2 \sin x \cos x dx \\ &= -\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos x dx. \end{aligned}$$

För det sista integral använder vi partiell integration en gång till:

$$-\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos x dx = -[x \sin x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx] = -\frac{\pi}{2} + 1.$$

□

5. (a) Definera vad som menas med att $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ är kontinuerlig. **(1 p)**

(b) Låt

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2x^2-x-1}{x-1} & x \neq 1 \\ a & x = 1 \end{cases}$$

Bestäm talet a så att funktionen $f(x)$ blir kontinuerlig. **(3 p)**

Lösningsförslag. a) Kolla i häftet.

b) Funktionen $\frac{2x^2-x-1}{x-1}$ är en elementär funktion och så är den kontinuerlig i alla x i sin definitionsmängd $x \neq 1$. Detta innebär att f är kontinuerlig i alla $x \neq 1$.

Nu undersöker vi kontinuitet i $x = 1$.

f ska vara kontinuerlig i $x = 1$ om och endast om $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1) = a$. Vi beräknar

$\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$:

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2 - x - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(2x+1)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} (2x+1) = 3.$$

Därför, om $a = 3$ då är f kontinuerlig också i $x = 1$.

□

DEL II – AVANCERADE PROBLEM

6. (a) Låt $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 1-$. Visa att $\sum_{n=1}^{\infty} (1 - b_n)$ är konvergent om och endast om $\sum_{n=1}^{\infty} \ln(b_n)$ är konvergent. (2 p)

- (b) Låt (a_n) vara växande talföljd av positiva reella tal.

Visa att $\sum_{n=1}^{\infty} \arccos^2\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}\right)$ är konvergent om och endast om (a_n) är begränsad talföljd.

(Tips: visa först att $\lim_{x \rightarrow 1-} \frac{\arccos x}{\sqrt{2(1-x)}} = 1$). (4 p)

Lösningsförslag. a) Observera att $\frac{-\ln(b_n)}{(1-b_n)}$ konvergerar mot 1 om b_n konvergerar mot 1. Detta visas genom (t.ex) L'Hopital regel: $\lim_{t \rightarrow 1} \frac{-\ln t}{1-t} = \lim_{t \rightarrow 1} \frac{-1}{-t} = 1$. Sedan implicerar jämförelsesatsen II för serier att $\sum_{n=1}^{\infty} (1 - b_n)$ är konvergent om och endast om $-\sum_{n=1}^{\infty} \ln(b_n)$ är konvergent. Det sista serien är konvergent om och endast om $\sum_{n=1}^{\infty} \ln(b_n)$ är konvergent.

- b) För att visa att $\lim_{x \rightarrow 1-} \frac{\arccos x}{\sqrt{2(1-x)}} = 1$ använder man L'Hopital regel:

$$\lim_{x \rightarrow 1-} \frac{\arccos x}{\sqrt{2(1-x)}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \lim_{x \rightarrow 1-} \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} \frac{1}{\frac{-1}{2\sqrt{1-x}}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \lim_{x \rightarrow 1-} \frac{2\sqrt{1-x}}{\sqrt{(1-x)(1+x)}} = \lim_{x \rightarrow 1-} \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{1+x}} = 1.$$

Det följer att $\lim_{x \rightarrow 1-} \frac{\arccos^2 x}{2(1-x)} = 1$.

Anta att (a_n) är begränsad. För att (a_n) är växande och begränsad, det följer att (a_n) är konvergent (enligt satsen i häftet). Låt $\lim a_n = a$. Låt $b_n = \frac{a_n}{a_{n+1}}$. Då har vi att $\lim b_n = 1-$.

Från $\lim_{x \rightarrow 1-} \frac{\arccos^2 x}{2(1-x)} = 1$ och jämförelsesatsen II för serier, har vi att $\sum_{n=1}^{\infty} \arccos^2(b_n)$

är konvergent om och endast om $\sum_{n=1}^{\infty} 2(1 - b_n)$ är konvergent. Dvs, om och endast om

$\sum_{n=1}^{\infty} (1 - b_n)$ är konvergent. Enligt del a) $\sum_{n=1}^{\infty} (1 - b_n)$ är konvergent om och endast om

$\sum_{n=1}^{\infty} \ln(b_n)$ är konvergent.

Nu använder vi att $b_n = \frac{a_n}{a_{n+1}}$ så blir $\sum_{n=1}^{\infty} \ln(b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} (\ln a_n - \ln a_{n+1}) = \lim_{n \rightarrow \infty} (\ln a_1 - \ln a_n) = \ln \frac{a_1}{a}$. Detta innebär att serien är konvergent.

Anta att serien är konvergent. Enligt $\lim_{x \rightarrow 1-} \frac{\arccos^2 x}{2(1-x)} = 1$ och jämförelsesatsen II för

serier, det följer att $\sum_{n=1}^{\infty} 2(1 - b_n)$ är konvergent. Enligt divergens test, vi måste ha att

$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 1$. Från del a) $\sum_{n=1}^{\infty} \ln(b_n)$ är konvergent. Enligt samma beräkningen som ovan,

har vi det $\sum_{n=1}^{\infty} \ln(b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} (\ln a_1 - \ln a_n)$ är konvergent. För att $\ln$ är kontinuerlig funktion med kontinuerlig inversen, då måste a_n också vara konvergent. Från satsen i häftet vi vet det konvergent talföljd är begränsad.

□

7. (a) Formulera och bevisa medelvärdesatsen för derivator. (Du får anta att Rolles sats är känd). **(3 p)**
- (b) Visa att om $f'(x) \leq 0$ för alla $x \in (a, b)$ så är f avtagande i (a, b) . **(3 p)**

Lösningsförslag. Kolla i häftet.

□

8. (a) Låt $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ vara två gången deriverbar funktion. Visa det för alla $x \in (a, b)$:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2} = f''(x).$$

(4 p)

- (b) Ge ett exempel på en funktion som är deriverbar vid någon punkt a men som inte är två gånger deriverbar vid punkten a .

(2 p)

Lösningsförslag. a) Vi kan använd L'Hopital regel först (derivera i h):

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'(x+h) - f'(x-h)}{2h}.$$

Sedan skriver vi det sista gränsvärde som

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{2} \left(\frac{f'(x+h) - f'(x)}{h} + \frac{f'(x-h) - f'(x)}{-h} \right).$$

Enligt definition av derivatan: $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'(x+h) - f'(x)}{h} = f''(x)$ och $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'(x-h) - f'(x)}{-h} = f''(x)$.

Därför:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{2} \left(\frac{f'(x+h) - f'(x)}{h} + \frac{f'(x-h) - f'(x)}{-h} \right) = f''(x).$$

- b) Låt t.ex. $f(x)$ vara primitiv funktion för $|x|$. Då har vi att $f'(x) = |x|$. Funktionen $|x|$ är inte deriverbar vid $a = 0$ dvs f är inte 2 gånger deriverbar vid $x = 0$.

Bevis det $|x|$ är inte deriverbar vid $x = 0$: $\lim_{x \rightarrow 0+} |x| = 1 \neq -1 = \lim_{x \rightarrow 0-} |x|$.

Beräkningen av primitiv funktion $f(x)$ av $|x|$: för $x \leq 0$, $f(x) = -\frac{x^2}{2}$; för $x > 0$, $f(x) = \frac{x^2}{2}$.

□