

Lösningförslag: SF1673

tentamen 18/10/2024





Lösningsförslag till tentamen
den 18 oktober 2024

DEL I – GRUNDLÄGGANDE PROBLEM

1. Låt $f(x) = \begin{cases} 3x + x^2 \cos \frac{1}{x^2}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0. \end{cases}$

(a) Visa att f är kontinuerlig.

(1 p)

(b) Beräkna derivatan $f'(x)$ för alla $x \in \mathbb{R}$. Är f' kontinuerlig? Motivera ditt svar.

(3 p)

Lösningsförslag.

□

(a) (i) För alla $x \neq 0$ är summa/produkt/sammansättning av elementära funktioner, därför: f -kontinuerlig i $x \neq 0$.

(ii) Vi undersöker kontinuitet i $x=0$:

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} (3x + x^2 \cos \frac{1}{x^2}) = \lim_{x \rightarrow 0} 3x + \lim_{x \rightarrow 0} x^2 \cos \frac{1}{x^2}$$

• $\lim_{x \rightarrow 0} 3x = 0$ (för att $3x$ är en kontinuerlig funktion)

• $|\cos \frac{1}{x^2}| \leq 1$ för alla $x \neq 0 \Rightarrow 0 \leq |x^2 \cos \frac{1}{x^2}| \leq |x|^2$,

$\lim_{x \rightarrow 0} |x|^2 = 0$ (för att $|x|^2$ är en kontinuerlig funktion)

Enligt insättningsatsen för talföljder, $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \cos \frac{1}{x^2} = 0$.

• Därför: $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0 = f(0)$ implicerar (enligt definitionen av kontinuitet)

att f är kontinuerlig i $x=0$.

(b) (i) $x \neq 0$: $f'(x) = 3 + 2x \cdot \cos \frac{1}{x^2} + x^2 \cdot (-\sin \frac{1}{x^2}) \cdot (-\frac{2}{x^3}) = 3 + 2x \cos \frac{1}{x^2} + \frac{2 \sin \frac{1}{x^2}}{x}$

(ii) $x=0$: Vi beräknar derivatan enligt definitionen av derivatan

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3h + h^2 \cos \frac{1}{h^2}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (3 + h \cos \frac{1}{h^2}) = 3 \quad \text{för att } \lim_{h \rightarrow 0} h \cos \frac{1}{h^2} = 0$$

(Samma motivation som i del a)

Från (i) och (ii): $f'(x) = \begin{cases} 3 + 2x \cos \frac{1}{x^2} + \frac{2 \sin \frac{1}{x^2}}{x} & x \neq 0 \\ 3 & x = 0 \end{cases}$

$f'(x)$ inte är kontinuerlig för att $\lim_{x \rightarrow 0} f'(x)$ finns inte!

Nämligen, $\lim_{x \rightarrow 0} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(3 + 2x \cdot \cos \frac{1}{x^2} + \frac{2}{x} \sin \frac{1}{x^2} \right) =$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} 3 + \lim_{x \rightarrow 0} 2x \cos \frac{1}{x^2} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2}{x} \sin \frac{1}{x^2}$$

$$= 3 + 0 + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2}{x} \sin \frac{1}{x^2}.$$

(obs : $\lim_{x \rightarrow 0} 2x \cos \frac{1}{x^2} = 0$ med samma motivation som i del (a))

Men $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2}{x} \sin \frac{1}{x^2}$ finns inte. Motivation: om det finns $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2}{x} \sin \frac{1}{x^2}$ $\Rightarrow$ det finns $\lim_{x_n \rightarrow 0} \frac{2}{x_n} \sin \frac{1}{x_n^2}$ för varje $x_n \rightarrow 0$. Låt $x_n = \frac{1}{\sqrt{(2n+1)\pi/2}}$, då
 är $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{x_n} \sin \frac{1}{x_n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{(2n+1)\pi}}{2\sqrt{2}} = \infty$ dvs talföljden $\frac{2}{x_n} \sin \frac{1}{x_n^2}$ är obegränsad!

Om talföljden $\frac{2}{x_n} \sin \frac{1}{x_n^2}$ är obegränsad, då måste talföljden vara divergent (enligt satsen från häftet som säger att varje konvergent talföljden är begränsad). Därför: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2}{x} \sin \frac{1}{x^2}$ finns inte.

2. Visa olikheterna

$$x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} < \ln(1+x) < x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$$

för $x > 0$.

Tips: Taylor sats.

(4 p)

Lösningsförslag.

□

Låt $f(x) = \ln(1+x)$

$$f'(x) = \frac{1}{1+x}$$

$$f''(x) = -\frac{1}{(1+x)^2}$$

$$f'''(x) = 2 \frac{1}{(1+x)^3}$$

$$f^{(4)}(x) = 2 \cdot (-3) \cdot \frac{1}{(1+x)^4}$$

$$f^{(5)}(x) = 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \frac{1}{(1+x)^5}$$

(i) Vi visar först den andra olikheten:

Från Taylor sats vi vet att

$$f(x) = \underbrace{f(0)}_0 + \underbrace{f'(0)}_1 x + \underbrace{\frac{f''(0)}{2!}}_{-\frac{1}{2}} x^2 + \underbrace{\frac{f'''(0)}{3!}}_{\frac{1}{3}} x^3 + \frac{f^{(4)}(\xi)}{4!} x^4$$

för något $\xi \in (0, x)$.

$$\frac{f^{(4)}(\xi)}{4!} = \frac{-3 \cdot 2}{4! (1+\xi)^4} = -\frac{1}{4(1+\xi)^4}$$

För $x > 0$, $\xi \in (0, x)$ så är $\xi > 0$, vilken implicerar att

$$\left\{ -\frac{1}{4(1+\xi)^4} < 0 \right\}$$

$$\text{Så är } f(x) - \left(x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 \right) = -\frac{1}{4(1+\xi)^4} < 0$$

$$\Rightarrow f(x) < x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3$$

(ii) Nu visar vi den första olikheten med samma metod:

$$\text{Från Taylor sats: } f(x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \frac{f^{(5)}(\xi)}{5!}x^5,$$

$$\xi \in (0, x) \text{ så } \xi > 0.$$

$$\Rightarrow \frac{f^{(5)}(\xi)}{5!} = \frac{1}{5(1+\xi)^5} > 0, \text{ vilken implicerar att}$$

$$f(x) - \left(x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 \right) = \frac{1}{5(1+\xi)^5} > 0$$

$$\Rightarrow f(x) > x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4$$

3. Låt $p \in \mathbb{N}$, $p \geq 1$. Bestäm alla deriverbara funktioner $y = y(x)$ som uppfyller ekvationen

$$\int_0^x (y(t))^p dt + 1 = y(x).$$

(4 p)

Lösningförslag.

□

Enligt analysens huvudsats:

$$\left(\int_0^x (y(t))^p dt \right)' = (y(x))^p, \text{ för kontinuerlig } (y(t))^p$$

(vi antar att y är deriverbar, så är y^p deriverbar vilken, enligt satsen, implicerar att y^p är kontinuerlig)

I ekvationen $\int_0^x y(t)^p dt + 1 = y(x)$ deriverar vi vänster och höger sidan:

$$\left(\int_0^x (y(t))^p dt + 1 \right)' = y'(x)$$

$$(y(x))^p = y'(x)$$

Vi har också begynnelse villkor, $y(0) = \int_0^0 y(t)^p dt + 1$
 $\Rightarrow \boxed{y(0) = 1}$

(i) Om $p=1$:

$$\left. \begin{array}{l} y(x) = y'(x) \\ y(0) = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{dy}{y} = dx \Rightarrow \ln|y| = x + C$$

$$|y| = e^{x+C}$$

$$|y| = e^x \cdot e^C, C \in \mathbb{R}$$

$$y = e^x \cdot C_1, C_1 \in \mathbb{R}$$

(obs: $C_1 = 0 \Rightarrow y = 0$ is a solution of the equation $y = y'$)

Nu använder vi begynnelsevillkor för att bestämma C_1 :

$y(0) = e^0 \cdot C_1 = 1 \Rightarrow C_1 = 1$ dvs. lösningen är $y = e^x$ och den är den enda lösningen där $p=1$.

(ii) $p > 1$: vi ska hitta lösningar av

$$\text{diff equation : } \left. \begin{aligned} (y(x))^p &= y'(x) \\ y(0) &= 1 \end{aligned} \right\}$$

$$\frac{dy}{y^p} = dx \Rightarrow \int \frac{dy}{y^p} = x + C$$

$$\Rightarrow \frac{y^{-p+1}}{-p+1} = x + C$$

$$\Rightarrow y^{-p+1} = (-p+1)(x+C) \quad (p \neq 1)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{y^{p-1}} = (-p+1)(x+C)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{(-p+1)(x+C)} = y^{p-1}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \left(\frac{1}{(-p+1)(x+C)} \right)^{\frac{1}{p-1}} = |y| & , p-1 \text{ - jämn} \\ \left(\frac{1}{(-p+1)(x+C)} \right)^{\frac{1}{p-1}} = y & , p-1 \text{ - udda} \end{cases}$$

$x=0$: $y(0)=1$ så har vi att

$$\frac{1}{(-p+1)C} = y^{p-1} = 1 \Rightarrow 1 = (-p+1)C \Rightarrow \boxed{C = \frac{1}{-p+1}}$$

4. (a) Avgör för vilka konstanter a konvergerar integralen

$$\int_e^{\infty} \frac{dx}{x(\ln x)^a}.$$

(2 p)

- (b) Visa att $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k(k+1)}}$ är konvergent och $\leq \frac{\pi+1}{2}$.

(2 p)

Lösningsförslag.

□

(a) Vi använder variabelbyte för att

beräkna $\int_e^R \frac{dx}{x(\ln x)^a}$

$$\int_e^R \frac{dx}{x(\ln x)^a} = \int_e^R \frac{d(\ln x)}{(\ln x)^a} \stackrel{[u=\ln x]}{=} \int_1^{\ln R} u^{-a} du = \begin{cases} \frac{u^{-a+1}}{-a+1} \Big|_1^{\ln R}, & a \neq 1 \\ \ln|u| \Big|_1^{\ln R}, & a = 1 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \frac{(\ln R)^{-a+1}}{-a+1} - \frac{1}{-a+1}, & a \neq 1 \\ \ln R, & a = 1 \end{cases}$$

$$\int_e^{\infty} \frac{dx}{x(\ln x)^a} = \begin{cases} \lim_{R \rightarrow \infty} \left(\frac{(\ln R)^{1-a}}{1-a} - \frac{1}{1-a} \right), & a \neq 1 \\ \lim_{R \rightarrow \infty} \ln R, & a = 1 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} -\frac{1}{1-a}, & a > 1 \text{ (för att } \lim_{R \rightarrow \infty} (\ln R)^{1-a} = 0) \\ \infty, & a < 1 \\ \infty, & a = 1 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ Integralen konvergerar om och endast om $a > 1$.

(b) Vi använder jämförelsesatsen II:

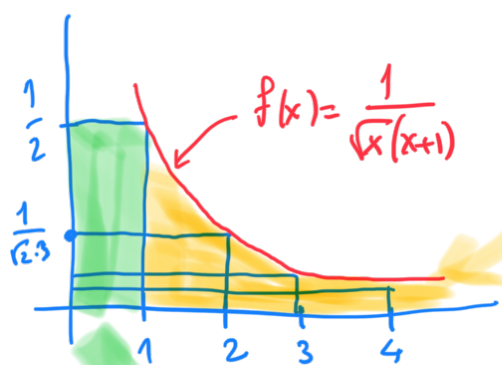
$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{\sqrt{k(k+1)}}}{\frac{1}{k^{3/2}}} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{k^{3/2}}{k^{3/2} + k^{1/2}} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{1 + \frac{1}{k}} = 1 \neq 0$$

därför $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k(k+1)}}$ konvergerar $\Leftrightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{3/2}}$ konvergerar

och $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{3/2}}$ konvergerar från satsen i häftet, för att $3/2 > 1$.

Därför: $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k(k+1)}}$ är konvergent.

För att begränsa serien tittar vi på sambandet med integralen!



$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k(k+1)}} \leq \frac{1}{\sqrt{1(1+1)}} + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k(k+1)}}$$

$$\leq \frac{1}{2} + \int_1^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x(x+1)}} dx \quad (*)$$

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x(x+1)}} \quad \begin{matrix} \uparrow \\ x = u^2 \\ dx = 2u du \end{matrix} \quad \int_1^{\infty} \frac{2u du}{u(u^2+1)} = 2 \int_1^{\infty} \frac{du}{u^2+1} = 2 \arctan u \Big|_1^{\infty}$$

$$= 2 \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \right) = 2 \cdot \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$$

Därför, från (*) har vi:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k(k+1)}} \leq \frac{1}{2} + \frac{\pi}{2} = \frac{1+\pi}{2}$$

5. (a) Beräkna längden $l(a, b)$ av kurvan $y = a \ln \frac{a^2}{a^2 - x^2}$, $0 \leq x \leq b < a$. (3 p)
 (b) Vad händer med längden då $b \rightarrow 0$? Vad händer med längden då $b \rightarrow a^-$? (1 p)

Lösningsförslag.

← formeln från häftet.

$$l(a, b) = \int_0^b \sqrt{1 + (y')^2} dx$$

$$y' = \frac{2ax}{a^2 - x^2}$$

$$l(a, b) = \int_0^b \sqrt{1 + \frac{4a^2x^2}{a^2 - x^2}} dx = \int_0^b \frac{a^2 + x^2}{a^2 - x^2} dx$$

$$= 2a^2 \int_0^b \frac{dx}{a^2 - x^2} - \int_0^b dx =$$

$$= a \ln \left| \frac{a+x}{a-x} \right| \Big|_0^b - b = a \ln \frac{a+b}{a-b} - b$$

$$\lim_{b \rightarrow 0} l(a, b) = \lim_{b \rightarrow 0} a \ln \frac{a+b}{a-b} - b = 0$$

$$\lim_{b \rightarrow a^-} l(a, b) = \lim_{b \rightarrow a^-} a \ln \left(\frac{a+b}{a-b} \right) - b = \infty$$

DEL II – AVANCERADE PROBLEM

6. Låt $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$.

(a) Definera vad som menas med att f har ett lokalt maximum i punkten $c \in (a, b)$.

(1 p)

(b) Bevisa följande sats: om f är deriverbar i punkten c och har ett lokalt maximum i c , då gäller att $f'(c) = 0$.

(3 p)

(c) Låt

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{n}, & x = \frac{m}{n}, m, n \in \mathbb{N}, (m, n) = 1 \\ 0, & x \in (0, 1) \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

Finns det ett lokalt maximum av f i något punkt $c \in (0, 1)$? Motivera ditt svar.

(2 p)

(Obs. $(m, n) = 1$ om och endast om det ända naturliga tal som delar både m och n är 1.)

Lösningsförslag.

□

6. (a) Se häftet eller föreläsningsanteckningar

(b) Se häftet eller föreläsningsanteckningar.

(c) Låt $c = \frac{1}{2}$. Då är $f(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$

Låt $I = (\frac{1}{4}, \frac{3}{4})$

För varje $x \in I \setminus \mathbb{Q}$: $f(x) = 0 < \frac{1}{2} = f(\frac{1}{2})$

För varje $x \in I \cap \mathbb{Q}$: $x = \frac{m}{n}$ och $f(x) = \frac{1}{n}$

men $n > 2$ så är $f(x) = \frac{1}{n} < \frac{1}{2} = f(\frac{1}{2})$

Därför, enligt definitionen av lokalt maximum
det följer att $c = \frac{1}{2}$ är ett lokalt maximum.

7. (a) Formulera och bevisa medelvärdessatsen för integraler (utan att använda generaliserade medelvärdessatsen). (3 p)
- (b) Låt $F(x) = \frac{1}{x + \ln x}$. Låt $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$, och låt $A(n)$ beteckna arean under graf av F mellan $x = n$ och $x = n + 1$. Vad är $\lim_{n \rightarrow \infty} A(n)$? Motivera ditt svar. (1 p)
- (c) Undersök om $\sum_{n=1}^{\infty} A(n)$ är konvergent eller divergent. (2 p)

Lösningsförslag. □

(a) Se häftet eller föreläsningsanteckningar.

$$(b) \quad A(n) = \int_n^{n+1} \frac{1}{x + \ln x} dx \stackrel{\text{medelvärdessatsen}}{=} \frac{1}{\xi_n + \ln \xi_n} \cdot ((n+1) - n)$$

$$= \frac{1}{\xi_n + \ln \xi_n}, \text{ för något } \xi_n \in (n, n+1)$$

Om $\xi_n \in (n, n+1)$, $n < \xi_n < n+1$ implicerar

att $\lim_{n \rightarrow \infty} \xi_n = \infty$. Vi motiverar det genom att använda

definitionen: för $M > 0$ det finns $N = M + 1$ s.a.

$n > M$ för alla $n \geq N$. Från olikheten

$\xi_n > n$ har vi att för $M > 0$ och $N = M + 1$, för varje

$n \geq M$, $\xi_n > n \geq M$. Enligt definitionen, det följer att

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \xi_n = \infty.$$

Därför: $\lim_{n \rightarrow \infty} A(n) = \lim_{\xi_n \rightarrow \infty} \frac{1}{\xi_n + \ln \xi_n} = 0$

$$\begin{aligned}
 (c) \quad \sum_{n=1}^{\infty} A(n) &= \sum_{n=1}^{\infty} \int_n^{n+1} \frac{1}{x+\ln x} dx = \\
 &= \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N \int_n^{n+1} \frac{1}{x+\ln x} dx \\
 &= \lim_{N \rightarrow \infty} \int_1^{N+1} \frac{1}{x+\ln x} dx = \int_1^{\infty} \frac{1}{x+\ln x} dx.
 \end{aligned}$$

Nu använder vi jämförelsesatsen II för integraler:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x+\ln x}}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{x+\ln x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{1 + \frac{\ln x}{x}} = 1 \neq 0$$

$$\text{dvs.} \quad \int_1^{\infty} \frac{1}{x+\ln x} dx \text{ konvergerar} \iff \int_1^{\infty} \frac{dx}{x} \text{ konvergerar.}$$

$$\text{Men} \quad \int_1^{\infty} \frac{dx}{x} = \ln x \Big|_1^{\infty} = \infty \quad \text{så} \quad \int_1^{\infty} \frac{dx}{x} \text{ divergerar}$$

$$\text{därför} \quad \int_1^{\infty} \frac{dx}{x+\ln x} \text{ divergerar, enligt ekvivalens ovan.}$$

8. (a) För en funktion $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ definiera vad som menas med en Riemann summa. Formulera Riemann Sats för integraler (dvs. satsen som handlar om Riemann summor och integralen). (2 p)
- (b) Låt (a_n) vara talföljden $a_n = \sum_{k=1}^n \frac{k^2}{n^3} \ln(1 + \frac{k}{n})$. Visa att a_n är konvergent och beräkna $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$. (4 p)

Lösningförslag. □

(a) Se häftet.

(b) Låt $f(x) = x^2 \ln(1+x)$, $x \in [0, 1]$

då är $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (\frac{k}{n})^2 \ln(1 + \frac{k}{n})$ Riemann summa för $f(x)$

med $\Delta x_i = \frac{1}{n}$ och uppdelning av intervallet

$$[0, 1] : 0 < \frac{1}{n} < \frac{2}{n} < \dots < \frac{n-1}{n} < \frac{n}{n} = 1.$$

Enligt Riemann Sats (som vi för använde för att funktionen f är kontinuerlig på $[0, 1]$)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (\frac{k}{n})^2 \ln(1 + \frac{k}{n}) = \int_0^1 x^2 \ln(1+x) dx.$$

För att beräkna integralen använder vi partiell integration: Låt $u = \ln(1+x)$ och $dv = x^2 dx$, så är $du = \frac{1}{1+x}$ och $v = \frac{x^3}{3}$.

$$\begin{aligned} \int_0^1 x^2 \ln(1+x) dx &= \frac{x^3}{3} \ln(1+x) \Big|_0^1 - \frac{1}{3} \int_0^1 \frac{x^3}{1+x} dx = \\ &= \frac{\ln 2}{3} - \frac{1}{3} \int_0^1 \frac{x^2(x+1) - x(x+1) + (x+1) - 1}{x+1} dx = \frac{\ln 2}{3} - \frac{1}{3} \left[\int_0^1 x^2 dx - \int_0^1 x dx + \int_0^1 dx - \int_0^1 \frac{dx}{1+x} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{\ln 2}{3} - \frac{1}{3} \left[\frac{1}{3} - \frac{1}{2} + 1 - \ln 2 \right] = \frac{2}{3} \ln 2 - \frac{5}{18} \\ &\quad \frac{2-3+6}{6} = \frac{5}{6} \cdot \frac{-1}{3} \end{aligned}$$