



**Lösningsförslag till tentamen
11 januari 2021**

DEL I – GRUNDLÄGGANDE PROBLEM

1. Låt $C^1([0, 1], \mathbb{R})$ vara vektorrummet av kontinuerligt deriverbara funktioner $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$. Låt $V = \text{Span}\{\sin x, \cos x, e^x, e^{-x}\}$ och låt $L: V \rightarrow V$ vara operatoren som ges av

$$L(f)(x) = \frac{1}{2}(f(x) + f'(x)) - f(0)e^x.$$

- (a) Bestäm en bas för bilden $\text{im } L$. **(2 p)**
(b) Är V en inre direkt summa av kärnan $\ker L$ och bilden $\text{im } L$? **(2 p)**

Lösningsförslag. De fyra funktionerna är linjärt oberoende och ger alltså en bas för V . Matrisen för L i denna bas är

$$A = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

- (a) Bilden spänns upp av $L(\sin x) = \frac{1}{2}(\sin x + \cos x)$, $L(\cos x) = \frac{1}{2}(-\sin x + \cos x) - e^x$, $L(e^x) = 0$, $L(e^{-x}) = -e^x$. Rangén av matrisen är 3 så de tre nollskilda funktionerna $L(\sin x)$, $L(\cos x)$, $L(e^{-x})$ utgör en bas. Alternativt ser vi att en bas ges av $\{\sin x, \cos x, e^x\}$.
(b) Bilden har dimension 3 och kärnan har dimension $4 - 3 = 1$ (dimensionssatsen). Alltså är det en inre direkt summa precis när $\ker L \cap \text{im } L = \{0\}$. Men $-e^x = L(e^{-x})$ ligger både i kärnan och i bilden. Alltså är det inte en inre direkt summa.

Svar.

- (a) En bas ges av $\{\sin x, \cos x, e^x\}$.
(b) Nej.

2. Låt $\mathbb{C}[x]$ vara vektorrummet av polynom med komplexa koefficienter med inre produkt

$$\langle p(x)|q(x) \rangle = \int_0^1 \overline{p(x)} q(x) dx, \quad \text{för alla } p(x), q(x) \text{ i } \mathbb{C}[x].$$

Bestäm den ortogonala projektionen av $x^2 + x + 1$ på delrummet $V = \text{Span}\{1, x\}$. **(4 p)**

Lösningsförslag. Vi börjar med att bestämma en ortogonal bas $\{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2\}$ för V . Som vår första basvektor väljer vi $\mathbf{b}_1 = 1$. Den andra basvektorn bestämmer vi med Gram-Schmidts metod:

$$\mathbf{b}_2 = x - \text{proj}_{\mathbf{b}_1}(x) = x - \frac{\langle \mathbf{b}_1 | x \rangle}{\langle \mathbf{b}_1 | \mathbf{b}_1 \rangle} \mathbf{b}_1 = x - \frac{\int_0^1 \overline{1} \cdot x dx}{\int_0^1 \overline{1} \cdot 1 dx} 1 = x - \frac{\left[\frac{x^2}{2} \right]_0^1}{\left[x \right]_0^1} = x - \frac{1}{2}$$

Eftersom $x + 1$ redan ligger i V så är:

$$\text{proj}_V(x^2 + x + 1) = x + 1 + \text{proj}_V(x^2) = x + 1 + \frac{\langle \mathbf{b}_1 | x^2 \rangle}{\langle \mathbf{b}_1 | \mathbf{b}_1 \rangle} \mathbf{b}_1 + \frac{\langle \mathbf{b}_2 | x^2 \rangle}{\langle \mathbf{b}_2 | \mathbf{b}_2 \rangle} \mathbf{b}_2$$

Vi beräknar

$$\frac{\langle \mathbf{b}_1 | x^2 \rangle}{\langle \mathbf{b}_1 | \mathbf{b}_1 \rangle} = \frac{\int_0^1 \overline{1} \cdot x^2 dx}{\int_0^1 \overline{1} \cdot 1 dx} = \frac{\left[\frac{x^3}{3} \right]_0^1}{\left[x \right]_0^1} = \frac{1}{3}$$

$$\frac{\langle \mathbf{b}_2 | x^2 \rangle}{\langle \mathbf{b}_2 | \mathbf{b}_2 \rangle} = \frac{\int_0^1 \overline{\left(x - \frac{1}{2}\right)} \cdot x^2 dx}{\int_0^1 \overline{\left(x - \frac{1}{2}\right)} \left(x - \frac{1}{2}\right) dx} = \frac{\left[\frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{6} \right]_0^1}{\left[\frac{1}{3} \left(x - \frac{1}{2}\right)^3 \right]_0^1} = \frac{2/24}{2/24} = 1$$

Detta ger

$$\text{proj}_V(x^2 + x + 1) = x + 1 + \frac{1}{3} + \left(x - \frac{1}{2}\right) = 2x + \frac{5}{6}$$

Vi kan nu lätt verifiera att $(x^2 + x + 1) - (2x + \frac{5}{6})$ är ortogonal mot 1 och x .

Alternativt kan vi ansätta $p(x) = ax + b$ och bestämma a och b så att $x^2 + x + 1 - p(x)$ blir ortogonal mot 1 och x :

$$0 = \langle 1 | x^2 + (1-a)x + (1-b) \rangle = \int_0^1 x^2 + (1-a)x + (1-b) dx$$

$$= \frac{1}{3} + \frac{1-a}{2} + 1-b = \frac{11}{6} - \frac{1}{2}a - b$$

$$0 = \langle x | x^2 + (1-a)x + (1-b) \rangle = \int_0^1 x^3 + (1-a)x^2 + (1-b)x dx$$

$$= \frac{1}{4} + \frac{1-a}{3} + \frac{1-b}{2} = \frac{13}{12} - \frac{1}{3}a - \frac{1}{2}b$$

vilket har lösningarna $a = 2$ och $b = \frac{5}{6}$.

Svar. $2x + \frac{5}{6}$

3. Låt $\mathbb{C}$ vara de komplexa talen betraktat som ett reellt vektorrum.
- (a) Vad är dimensionen av tensorprodukten $\mathbb{C} \otimes \mathbb{C}$? (1 p)
 - (b) Visa att det finns en unik linjär avbildning $L: \mathbb{C} \otimes \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ sådan att $L(z \otimes w) = zw$ för alla $z, w \in \mathbb{C}$. (1 p)
 - (c) Bestäm en bas för kärnan till L . (2 p)

Lösningsförslag.

- (a) En bas för $\mathbb{C}$ är $\{1, i\}$. En bas för $\mathbb{C} \otimes \mathbb{C}$ är därför $\{1 \otimes 1, 1 \otimes i, i \otimes 1, i \otimes i\}$ och dimensionen är alltså 4.
- (b) Multiplikationsavbildningen $m: \mathbb{C} \times \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ som ges av $m(z, w) = zw$ är bilinjär eftersom multiplikationen är associativ, kommutativ och distributiv: t ex i andra argumentet $z(\lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2) = \lambda_1(zw_1) + \lambda_2(zw_2)$. Den universella egenskapen för tensorprodukten säger därför att det finns en unik linjär avbildning L sådan att $L(z \otimes w) = m(z, w) = zw$.
- (c) Eftersom $L(z \otimes 1) = z$ så är L surjektiv och kärnan är alltså tvådimensionell. Per inspektion ser vi att en bas för kärnan ges av:

$$b_1 = 1 \otimes i - i \otimes 1$$

$$b_2 = 1 \otimes 1 + i \otimes i$$

DEL II – BEGREPP OCH SATSER

4. Ge exempel på komplexa 2×2 -matriser A , B , C och D sådana att
- (a) A är Hermitesk men inte unitär. (1 p)
 - (b) B är unitär men inte Hermitesk. (1 p)
 - (c) C är diagonaliserbar men varken unitär eller Hermitesk. (1 p)
 - (d) D är inte diagonaliserbar. (1 p)

Lösningsförslag. För A , B och C kan vi välja diagonala matriser. En diagonalmatris är Hermitesk precis när egenvärdena är reella och unitär precis när egenvärdena har belopp 1.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 2i & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

För D kan vi välja en matris på Jordans normalform bestående av ett enda block av storlek 2×2 eftersom en matris på Jordans normalform är diagonaliserbar precis när den är diagonal.

$$D = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

5. Låt V vara ett komplext vektorrum med bas $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n\}$.
- (a) Definiera det *duala vektorrummet* V^* och den *duala basen* $\mathbf{b}_1^*, \dots, \mathbf{b}_n^*$ till $\mathcal{B}$. (1 p)
 - (b) Visa att $\mathbf{b}_1^*, \dots, \mathbf{b}_n^*$ är en bas. (2 p)
 - (c) Låt L vara en operator på V som i basen $\mathcal{B}$ ges av matrisen $A = (A_{ij})$. Definiera den *duala avbildningen* $L^*: V^* \rightarrow V^*$ och beskriv dess matris i den duala basen. (1 p)

Lösningsförslag.

- (a) Det duala vektorrummet V^* består av alla linjära former på V , dvs linjära avbildningar $V \rightarrow \mathbb{C}$. Den duala basen består av de linjära formerna $\mathbf{b}_i^*$ där $\mathbf{b}_i^*(\mathbf{b}_j) = \delta_{ij}$, dvs

$$\mathbf{b}_i^*(a_1\mathbf{b}_1 + \dots + a_n\mathbf{b}_n) = a_i.$$

- (b) Låt $\phi: V \rightarrow \mathbb{C}$ vara en linjär form. Då är

$$\phi(a_1\mathbf{b}_1 + \dots + a_n\mathbf{b}_n) = a_1\phi(\mathbf{b}_1) + \dots + a_n\phi(\mathbf{b}_n).$$

Alltså är $\phi = \phi(\mathbf{b}_1)\mathbf{b}_1^* + \dots + \phi(\mathbf{b}_n)\mathbf{b}_n^*$ och $\mathbf{b}_1^*, \dots, \mathbf{b}_n^*$ spänner upp det duala rummet. För att se att den duala basen är linjärt oberoende, betrakta en linjärkombination

$$\phi = a_1\mathbf{b}_1^* + \dots + a_n\mathbf{b}_n^*.$$

Då är $a_i = \phi(\mathbf{b}_i)$ för alla i . Om $\phi = 0$ är alltså $a_i = 0$ för alla i .

- (c) Den duala avbildningen $L^*: V^* \rightarrow V^*$ definieras genom $L^*(\phi) = \phi \circ L$. Vi har därmed att

$$L^*(\mathbf{b}_i^*) = \mathbf{b}_i^* \circ L = \sum_{j=1}^n (\mathbf{b}_i^* \circ L(\mathbf{b}_j)) \mathbf{b}_j^* = \sum_{j=1}^n (a_{ij}) \mathbf{b}_j^*$$

dvs, den *ite* kolumnen i matrisen för L^* ges av den *ite* raden i matrisen för L . Alltså ges L^* i den duala basen av matrisen A^T .

DEL III – AVANCERADE PROBLEM

6. För alla värden på parametern $a \in \mathbb{R}$, bestäm Jordans normalform till matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2a - 3 & a \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 3 - a & 2 \end{bmatrix}.$$

(Du behöver inte bestämma någon Jordanbas.)

(4 p)

Lösningsförslag. Det karakteristiska polynomet är

$$P_A(x) = \det(xI - A) = (x - 2) \begin{vmatrix} x - a & 0 \\ a - 3 & x - 2 \end{vmatrix} = (x - 2)^2(x - a).$$

Om $a = 2$ har vi alltså ett egenvärde $\lambda = 2$ med algebraisk multiplicitet 3. Om $a \neq 2$ har vi två olika egenvärden: $\lambda = 2$ med algebraisk multiplicitet 2 och $\lambda = a$. Vi beräknar nu den geometriska multipliciteten till egenvärdet $\lambda = 2$.

$$\ker(A - 2I) = \text{null} \left(\begin{bmatrix} 0 & 2a - 3 & a \\ 0 & a - 2 & 0 \\ 0 & 3 - a & 0 \end{bmatrix} \right) = \text{null} \left(\begin{bmatrix} 0 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right)$$

eftersom antingen $a - 2 \neq 0$ eller $3 - a \neq 0$. Alltså är dimensionen av kärnan, dvs den geometriska multipliciteten, lika med 2 om $a = 0$ och 1 om $a \neq 0$. Vi kan nu dra följande slutsatser:

Om $a = 0$ sammanfaller den geometriska och algebraiska multipliciteten och A är diagonaliserbar med Jordanformen

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Om $a = 2$ har vi ett enda egenvärde med algebraisk multiplicitet 3 och geometrisk multiplicitet 1. Alltså ett enda Jordanblock:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Om $a \neq 0$ och $a \neq 2$ har vi två egenvärden som båda har geometrisk multiplicitet 1 och alltså två Jordanblock:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & a \end{bmatrix}.$$

7. Låt $\mathbf{v}_1$ och $\mathbf{v}_2$ vara två vektorer i $\mathbb{R}^n$ och låt ℓ_1 och ℓ_2 vara motsvarande linjer genom origo i $\mathbb{R}^n$. Låt θ vara vinkeln mellan $\mathbf{v}_1$ och $\mathbf{v}_2$. Notera att $0 \leq \theta \leq \pi$.
- (a) Om $n = 2$ och S_i betecknar speglingen i linjen ℓ_i , för vilka vinklar θ kommuterar S_1 och S_2 ? Beskriv också operatoren $S_1 S_2$ för varje sådan vinkel θ . **(2 p)**
- (b) Om $n = 3$ och R_i betecknar rotation kring linjen ℓ_i med vinkeln $\pi/3$ (vinkeln mäts med hjälp av riktningsvektorn $\mathbf{v}_i$ och högerhandsregeln), för vilka vinklar θ kommuterar R_1 och R_2 ? Beskriv operatoren $R_1 R_2$ för varje sådan vinkel θ . **(2 p)**

Lösningsförslag. Två diagonaliserbara operatorer L_1 och L_2 kommuterar om de är samtidigt diagonaliserbara. Om L_1 har egenrum av dimension 1 finns det ett unikt sätt att diagonalisera L_1 upp till omordning och skalning av egenvektorena. Detta betyder att om $\mathbf{v}$ är en egenvektor till L_1 med egenvärde λ så är $\mathbf{v}$ också en egenvektor till L_2 med egenvärde μ som inte nödvändigtvis är lika med λ .

- (a) Egenrummen till S_i är linjen ℓ_i ($\lambda = 1$) och dess ortogonala komplement ($\lambda = -1$). För att S_1 och S_2 ska kommutera behöver alltså antingen linjerna sammanfalla ($\theta = 0$ eller $\theta = \pi$) eller vara ortogonala mot varandra ($\theta = \pi/2$). Om de sammanfaller är $S_1 S_2$ identitetsoperatoren. Om linjerna är ortogonala mot varandra blir $S_1 S_2 = -I$, dvs rotation med π grader, eftersom en vektor $\mathbf{v}$ i ℓ_1 avbildas på $-\mathbf{v}$ och en vektor $\mathbf{w}$ i ℓ_2 avbildas på $-\mathbf{w}$.
- (b) Operatoren R_i är inte diagonaliserbar över de reella talen men är diagonaliserbar över de komplexa talen. Om vi väljer en högerhandsorienterad ortonormal bas för $\mathbb{R}^3$ med $\mathbf{b}_3$ längs med ℓ_i så är matrisen för R_i :

$$[R_i] = \begin{bmatrix} \cos \frac{\pi}{3} & -\sin \frac{\pi}{3} & 0 \\ \sin \frac{\pi}{3} & \cos \frac{\pi}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Det karakteristiska polynomet är

$$P_{R_i}(x) = (x - 1) \left(\left(x - \cos \frac{\pi}{3} \right)^2 + \sin^2 \frac{\pi}{3} \right)$$

och egenvärdena är alltså $\lambda = 1$ och $\lambda = \cos \frac{\pi}{3} \pm i \sin \frac{\pi}{3}$. Notera att de två senare egenvärdena inte är reella. Egenrummet till $\lambda = 1$ är ℓ_i medan de komplexa egenvärdena saknar reella egenvektorer. Om R_1 och R_2 är samtidigt diagonaliserbara över $\mathbb{C}$ så måste egenrummen sammanfalla eftersom de är endimensionella, fast möjligen för olika egenvärden. Eftersom $\mathbf{v}_1$ är en egenvektor till R_1 med egenvärde 1 så är alltså $\mathbf{v}_1$ även en egenvektor till R_2 . Eftersom alla reella egenvektorer till R_2 har reella egenvärden, och därmed egenvärdet 1, måste $\mathbf{v}_1$ vara en vektor i ℓ_2 , dvs $\ell_1 = \ell_2$.

Om R_1 och R_2 kommuterar är alltså $\theta = 0$ eller $\theta = \pi$. Om $\theta = 0$ så är $R_1 R_2$ rotation kring $\ell_1 = \ell_2$ med vinkeln $2\pi/3$. Om $\theta = \pi$ så är $R_1 R_2$ identitetsoperatoren.

Svar.

- (a) $\theta = 0, \pi$ ($S_1 S_2 = I$) och $\theta = \frac{\pi}{2}$ ($S_1 S_2 = -I$)
 (b) $\theta = 0$ ($R_1 R_2$ rotation med vinkeln $\frac{2\pi}{3}$) och $\theta = \pi$ ($R_1 R_2 = I$).

8. Låt V vara ett ändligtdimensionellt reellt inre produktrum. Låt $\text{Hom}(V, V)$ vara rummet av operatorer på V med den inre produkten $\langle L_1 | L_2 \rangle = \text{tr}(L_1^\dagger L_2)$. Låt $S \subset \text{Hom}(V, V)$ vara delrummet av symmetriska, dvs självdjungerade, operatorer. Bestäm $S^\perp$ och ge en enkel formel för den ortogonala projektionen på S . **(4 p)**

Lösningsförslag. Välj en bas $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n$ för V . Låt $\mathbf{e}_{ij} = \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j^*$ vara operatoren som svarar mot matrisen A som är noll förutom att $a_{ij} = 1$. Då är $\{\mathbf{e}_{ij}\}_{1 \leq i, j \leq n}$ en bas för $\text{Hom}(V, V)$. På basen ges den inre produkten av

$$\langle \mathbf{e}_{ij} | \mathbf{e}_{kl} \rangle = \text{tr}(\mathbf{e}_{ji} \mathbf{e}_{kl}) = \text{tr}(\delta_{ik} \mathbf{e}_{jl}) = \delta_{ik} \delta_{jl}.$$

Alltså är $\{\mathbf{e}_{ij}\}_{1 \leq i, j \leq n}$ en ortonormal bas.

En bas för S är $\{\mathbf{e}_{ij} + \mathbf{e}_{ji}\}_{1 \leq i < j \leq n}$. Om L är en operator på V med matris $B = (b_{ij})$ är alltså L ortogonal mot de symmetriska operatorerna om och endast om

$$0 = \langle \mathbf{e}_{ij} + \mathbf{e}_{ji} | L \rangle = b_{ij} + b_{ji} \iff b_{ji} = -b_{ij}$$

för alla $1 \leq i < j \leq n$. Alltså precis när B är skevsymmetrisk ($B^T = -B$), dvs om $L^\dagger = -L$.

Vi har alltså att $\text{Hom}(V, V) = S \oplus S^\perp$ där S är de symmetriska operatorerna och $S^\perp$ är de skevsymmetriska operatorerna. Vidare kan vi skriva varje operator L som

$$L = \frac{L + L^\dagger}{2} + \frac{L - L^\dagger}{2}.$$

Eftersom den första termen är symmetrisk och den andra termen är skevsymmetrisk så är detta den unika uppdelningen av L som en summa av en symmetrisk och en skevsymmetrisk operator. Den ortogonala projektionen på S är alltså

$$\text{proj}_S(L) = \frac{L + L^\dagger}{2}.$$

Svar. $S^\perp$ består av de skevsymmetriska operatorerna, dvs $L: V \rightarrow V$ så att $L^\dagger = -L$. En formel för den ortogonala projektionen på S är $\text{proj}_S(L) = \frac{L + L^\dagger}{2}$.

9. Låt V vara ett komplext vektorrum av dimension n och låt $d, k \geq 1$ vara heltal. Vad är det minsta respektive största möjliga värdet på $\dim \ker(L^k)$ för en operator L på V sådan att $\dim \ker(L) = d$? **(4 p)**

Lösningsförslag. Vi kan välja en Jordanbas för L så att L blir blockdiagonal. Kärnan av L^k är då den direkta summan av kärnan av varje block och dimensionen av kärnan är summan av dimensionerna av kärnan av varje block. Betrakta nu ett Jordanblock

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda \end{bmatrix}$$

av storlek $s \times s$. Om $\lambda \neq 0$ så är Λ inverterbar och $\ker(\Lambda^k) = \{0\}$. Om $\lambda = 0$ så är Λ^k en matris med enbart nollor förutom ettor på den k te superdiagonalen. Alltså är $\text{rk}(\Lambda^k) = \max\{0, s - k\}$ och därmed är

$$\dim(\ker(\Lambda^k)) = \min\{k, s\}.$$

Eftersom L har exakt d stycken Jordanblock med egenvärde 0 blir alltså $d \leq \dim \ker(L^k) \leq kd$. Vidare är uppenbart $\dim \ker(L^k) \leq n$. Alltså är

$$d \leq \dim \ker(L^k) \leq \min\{kd, n\}.$$

Den nedre gränsen uppnås om alla Jordanblock med egenvärde 0 har storlek 1 (t ex om L diagonaliserbar). Vi ska nu visa att den övre gränsen går att uppnå. Om $kd \leq n$ finns en operator L med Jordanform bestående av d stycken block med egenvärdet 0, alla av storlek k , samt några block med andra egenvärden. Detta ger $\dim \ker(L^k) = kd$. Om $kd \geq n$ kan vi hitta en operator L med Jordanform bestående av d stycken block med storlekar $1 \leq s_1, s_2, \dots, s_d \leq k$ och så att $s_1 + s_2 + \dots + s_d = n$. Då är $\dim \ker(L^k) = s_1 + s_2 + \dots + s_d = n$.

Svar. Det minsta respektive största värdet på $\dim \ker(L^k)$ är d och $\min\{kd, n\}$.