

Lösningsförslag till Omtentamen i Modern Fysik SH1014

14.00-19.00, 2023-04-14, KTH, Stockholm

Tillåtna hjälpmedel: miniräknare + *Matematics Handbook Beta*

Formelblad delas ut tillsammans med tentamenslydelsen

Tentamen består av 8 problem som vardera ger maximalt 5 poäng. För godkänt krävs 20 poäng. Betyget baseras på uppnådd poäng. Betygskriterierna är följande:

A:36-40, B:32-35.5, C:28-31.5, D:24-27.5, E:20-23.5, Fx:18-19.5, F:0-17.5

1. Problem:

Forskaren Liisa arbetar med en detektor som består av en NaI-scintillator och ett fotomultiplikator(PM)rör. Hon vet att ljusfotonerna som skickas ut från NaI-kristallen träffar PM-rörets fotokatod (en tunn metallisk folie) och slår ut elektroner. Liisa funderar på hur valet av material i fotokatoden kan påverka PM-rörets effektivitet.

Efter att ha studerat ljusspektrumet från NaI-kristallen så approximerar Liisa den våglängdsberoende intensiteten, I , till följande gaussiska form:

$$I(\lambda) = Ae^{-(\lambda-\lambda_0)^2/(2\sigma^2)}$$

där $\lambda_0 = 415$ nm, $\sigma = 45$ nm, och A är en normaliseringskonstant.

a) Ställ upp den allmänt giltiga formeln för hur elektronernas (som kommer ut från fotokatoden) maximala kinetiska energi, $E_{\max}$, beror på våglängden λ hos inkommande ljusfotoner. [1 p]

b) Använd medelvärdet på våglängden hos fotonerna från NaI-kristallen och bestäm motsvarande specifika värde för $E_{\max}$ om fotokatoden är gjord av cesium som har utträdesarbetet 1.95 eV. [1 p]

c) Liisa har räknat ut att för cesium så har i princip alla ljusfotonerna från NaI tillräcklig energi för att kunna slå ut elektroner. Men hon funderar på att testa andra material till fotokatoden. För vilka av följande metaller skulle minst 50% av NaI-fotonerna kunna ge tillräcklig energi för att kunna slå ut elektroner, dvs ($E_{\max} > 0$)? Grundämnet anges med utträdesarbetet i eV inom parentes: Ag(4.26), Au(5.10), Cu(4.53), K(2.29), Mg(3.66), Na(2.36), Pt(5.12), Sn(4.42), Ta(4.00), W(4.32). [3 p]

Lösning:

a)

$$E_{\max} = h\nu - W = \frac{hc}{\lambda} - W.$$

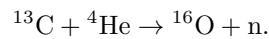
b) Gaussfunktionen är symmetrisk kring det maximala värdet λ_0 , dvs medelvärdet är 415 nm. Vi har $W=1.95$ eV. Elektronernas maximala energi blir:

$$E_{\max} = \frac{hc}{415 \text{ [nm]}} - 1.95 \text{ [eV]} = \dots = 1.0355 \text{ [eV]} \approx 1.04 \text{ [eV]}.$$

c) Medelvärdet 415 nm ger fotonenergin $E_f = hc/415 \text{ [nm]} = 2.9855$ eV. Alla W som är större än så funkar inte eftersom det innebär att mindre än halva gausskurvan (dvs mindre än 50% av intensiteten) i våglängdsspektrumet kommer kunna ge ett positivt värde på $E_{\max}$. Dvs de grundämnen som fungerar på listan är endast **K** och **Na**.

2. Problem:

I den s.k. *s-processen*, som pågår inuti vissa stora stjärnor, skapas nya grundämnen genom neutron-infångning kombinerat med beta-sönderfall. För att detta ska fungera krävs något slags naturlig neutronkälla. En möjlig neutronproducerande kärnreaktion som kan förekomma inuti stjärnor är följande:



a) Beräkna reaktionens Q -värde [3 p]

b) Betrakta systemet från masscentrumsystemet och beräkna den kinetiska energin som neutronen får. [2 p]

Lösning:

$$\begin{aligned} Q &= \Delta E c^2 = (m(^{13}\text{C}) + m(^4\text{He}) - m(^{16}\text{O}) - m(\text{n}))c^2 = \\ &= (13.003354 + 4.002603 - 15.994914 - 1.00866501) \cdot 931.502 = 2.2151 \text{ [MeV]}. \end{aligned}$$

$$E_{\text{n}} = \frac{Q}{1 + \frac{m_{\text{n}}}{m_{^{16}\text{O}}}} \approx \frac{Q}{1 + \frac{1}{16}} = 2.0848 \text{ [MeV]}.$$

3. Problem:

Betrakta en neonatom (Ne) där alla elektroner utom en är borttagna. Elektronen befinner sig i grundtillståndet, dvs $n = 1$.

a) Vilken våglängd behöver en inkommande foton ha för att excitera elektronen till ett $n = 2$ -tillstånd? [2 p]

Vi tänker oss nu att samma en-elektron-neonatom befinner sig i 2p-tillståndet. Då har vi följande radiella vågfunktion:

$$R_{2p}(r) = \frac{1}{(2a_0/Z)^{3/2}} \frac{Zr}{\sqrt{3} \cdot a_0} e^{-Zr/2a_0}$$

Notera att formen från formelbladet här är modifierad med atomtalet Z för att ta hänsyn till laddningen hos atomkärnan.

b) Bestäm den mest sannolika radien för Ne-atomens elektron i 2p-tillståndet.

Ange svaret i enheten a_0 . [3 p]

Lösning:

a) Vi betraktar atomen som *vätelik*, med kärnladdningen $Z = 10$, eftersom atomtalet för neon är 10. Energin för en nivå med huvudkvantalet, n , är då:

$$E_n = \frac{-Z^2 \cdot 13.6 \text{ [eV]}}{n^2}.$$

Den efterfrågade våglängden, λ , beror på energiskillnaden mellan tillstånden $n = 1$ och $n = 2$. Med sambandet $E_{\text{foton}} = \Delta E_n = h\nu = hc/\lambda$ så får vi:

$$\lambda = \frac{hc}{\Delta E_n} = \frac{hc}{\frac{-Z^2 \cdot 13.6 \text{ [eV]}}{2^2} - \frac{-Z^2 \cdot 13.6 \text{ [eV]}}{1^2}} = \frac{hc}{1360 \text{ [eV]}} \frac{1}{\frac{3}{4}} = \frac{hc}{1020 \text{ [eV]}} = 1.214 \text{ nm}.$$

b) Den mest sannolika radien fås genom att betrakta sannolikhetsfunktionen $P(r)$, som beror på kvadraten på den radiella vågfunktionen multiplicerat med r^2 , eftersom volymselementet i sfäriska koordinater väger med r^2 :

$$P(r) = R_{2p}^2(r)r^2 = \frac{1}{(2a_0/Z)^3} \frac{Z^2 r^4}{3 \cdot a_0^2} e^{-Zr/a_0} = kr^4 e^{-Zr/a_0},$$

där k är en konstant som beror på Z och a_0 , men som inte påverkar resultatet för den mest sannolika radien. Denna fås genom att derivera $P(r)$ och leta efter nollställena:

$$\frac{dP(r)}{dr} = 4kr^3 e^{-Zr/a_0} - kr^4 \frac{Z}{a_0} e^{-Zr/a_0} = kr^3 e^{-Zr/a_0} \left(4 - \frac{Zr}{a_0} \right) = 0.$$

Förutom triviala nollställena då $r = 0$ och då $r \rightarrow \infty$ så får vi nu:

$$4 - \frac{Zr}{a_0} = 0$$

$$r = \frac{4a_0}{Z} = [Z(\text{Ne}) = 10] = \frac{2}{5} a_0.$$

Vi noterar att en vätelik atom med ett högre värde på Z , som en-elektron-neon-jonen i denna uppgift har sina elektroner på ett kortare avstånd från kärnan än väte har.

4. Problem:

Fysikstudenten Agaton har byggt en fin drönare med en myondetektor på. Med den så tänker han försöka mäta myonens halveringstid, $t_{1/2}$. Agaton antar förenklat att alla myoner rör sig rakt ner mot jordytan och att de alla har bildats ovanför 3000 meters höjd. Agatons kompis Liisa har redan mätt de kosmiska myonernas hastighet så han använder hennes värde som är 99.5% av ljushastigheten.

Agaton kör upp sin drönardetektor i luften och mäter upp 1165 myoner per minut vid en höjd över marken på 300 meter och 1230 myoner per minut vid höjden 850 meter.

- a) Hur många myoner per minut borde Agaton kunna mäta upp vid jordytan? [2 p]
b) Beräkna myonernas halveringstid (i deras eget inertialsystem.). [3 p].

Lösning:

a)

Tiden mellan mätpunkterna i jordens inertialsystem:

$$t = \Delta t_{(\text{jord})} = \frac{850 - 300}{0.995c} = 1.84 \cdot 10^{-6} \text{ s.}$$

Vi har exponentiellt sönderfall av myonerna:

$$N = N_0 e^{-\lambda t}$$

$$\frac{N}{N_0} = \frac{1165}{1230}$$

$$\lambda = \frac{-\ln\left(\frac{N}{N_0}\right)}{t}$$

$$t_{1/2(\text{jord})} = \frac{\ln 2}{\lambda} = \dots = 2.354 \cdot 10^{-5} \text{ s.}$$

Tiden från 850 m till jordytan är: $t_{\text{yta}} = 850/0.995c = 2.8495 \cdot 10^{-6} \text{ s.}$

$$N_{\text{jordytan}} = N_0 e^{-t_{\text{yta}} \ln 2 / t_{1/2(\text{jord})}} = 1131.$$

Vi förväntar oss att detektera ca 1131 myoner per minut vid jordytan. Överkurs: Det finns alltid en statistisk variation vid denna typ av detektion och sönderfall. Distributionen som är relevant här är av Poisson-typ och den statistiska variationen av N är därför $\sqrt{N}$, så vi förväntar oss att detektera 1131 ± 34 myoner vid jordytan.

b)

Här beräknar vi Lorentzfaktorn, γ , och använder sedan tidsdilatation för att få fram halveringstiden i myonens eget inertialsystem:

$$\frac{v}{c} = 0.995 \Rightarrow \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} = 10.013$$

$$t_{1/2(\text{myon})} = \frac{t_{1/2(\text{jord})}}{\gamma} = 2.35 \cdot 10^{-6} = 2.35 \mu\text{s}$$

5. Problem:

Forskaren Pi använder röntgendiffraktion för att studera en okänd kristall. Den okända kristallen är preparerad så att atomplanet ligger upplinjerat i ytan och den har ett avstånd mellan atomplanen, d , på 0.425 nm. Röntgenröret består av en elektronkanon i vilken elektroner accelereras över ett spänningsgap med spänningen U och sedan träffar en anod av koppar. Från anoden så skickas röntgenstrålningen ut som en kolli-merad stråle som Pi sedan låter falla in mot kristallen med glansvinkeln (vinkeln mellan ytan och strålen), θ .

a) Vilken är den kortaste våglängd, $\lambda_{\min}$, som röntgenstrålningen kan få vid en accelerationsspänning på 20 kV? [1 p]

b) K_{α} -linjen i koppar har en våglängd, λ_{α} , på 0.1549 nm. Bestäm den minsta vinkel θ för vilken Braggvill-koret är uppfyllt för denna kristall med λ_{α} . [2 p]

c) Pi skulle vilja använda neutrdiffraction också för att studera kristallen, men är lite osäker på hur hög neutronenergi som behövs. Hjälp Pi genom att bestämma den kinetiska energin (i enheten eV) som för en neutron ger en de Broglie-våglängd identisk med den ovanstående λ_{α} . [2 p]

Lösning:

a)

Den kinetiska energin, E_e , hos de elektroner som träffar anoden är:

$$E_e = eU = 20 \text{ [keV]}.$$

Den maximala energin hos röntgenfotonerna blir då 20 keV. Vi har således:

$$\begin{aligned} E &= h\nu = \frac{hc}{\lambda_{\min}} \\ \lambda_{\min} &= \frac{hc}{20 \text{ [keV]}} = \dots = 62 \cdot 10^{-12} \text{ [m]}. \end{aligned}$$

Den minsta möjliga våglängden blir 62 [pm].

b)

Braggs lag, minsta vinkeln fås då $n = 1$:

$$\begin{aligned} 2d \sin(\theta) &= n\lambda, n = 1, 2, 3, \dots \\ \sin(\theta) &= \frac{\lambda_{\alpha}}{2d} = 0.2 \\ \theta &= 11.5^{\circ}. \end{aligned}$$

c)

Vi vill ha en de Broglievåglängd på 0.1549 nanometer:

$$\begin{aligned} \lambda &= \frac{h}{p} = 0.1549 \text{ [nm]} \\ E &= \frac{p^2}{2m} \Rightarrow p = \sqrt{2mE} \\ \lambda &= \frac{h}{\sqrt{2mE}} \\ E &= \frac{1}{2m} \left(\frac{h}{\lambda} \right)^2 = \dots = 0.034 \text{ [eV]}. \end{aligned}$$

Neutronens energi ska vara 34 meV för att ge samma våglängd som λ_{α} . Vi noterar att det är ok att räkna icke-relativistiskt pga den låga kinetiska energin.

6. Problem:

En partikel med massan m befinner sig i en endimensionell potential, $U(x)$. Partikelns vågfunktion kan skrivas:

$$\psi(x) = \begin{cases} Axe^{-x/2} & \text{för } x > 0 \\ 0 & \text{för } x \leq 0 \end{cases}$$

a) Normera vågfunktionen, dvs bestäm konstanten A . [2 p]

b) Bestäm potentialen $U(x)$ samt partikelns energi, E . [3 p]

Lösning:

a) För att normera så ställer vi upp normeringsvillkoret, dvs att sannolikheten för att hitta partikeln i det tillgängliga intervallet, och löser sedan ut konstanten A :

$$\begin{aligned} \int_0^\infty |\psi(x)|^2 dx &= \\ A^2 \int_0^\infty x^2 e^{-x} dx &= 1 \end{aligned}$$

Vi kan använda följande integralformel från formelbladet:

$$\int_0^\infty r^m e^{-br} dr = \frac{m!}{b^{m+1}}.$$

Med $m = 2$, $b = 1$ så får vi:

$$\begin{aligned} A^2 \frac{2!}{1^3} &= 2A^2 = 1 \\ A &= \frac{1}{\sqrt{2}}. \end{aligned}$$

b) Vi förbereder oss genom att derivera $\psi(x)$ två gånger:

$$\begin{aligned} \psi(x) &= Axe^{-x/2} \\ \frac{d\psi}{dx} &= Ae^{-x/2} - \frac{Ax}{2}e^{-x/2} \\ \frac{d^2\psi}{dx^2} &= -\frac{A}{2}e^{-x/2} - \frac{A}{2}e^{-x/2} + \frac{Ax}{4}e^{-x/2} = Ae^{-x/2} \left(-1 + \frac{x}{4}\right) = \psi(x) \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{x}\right). \end{aligned}$$

Vi skriver nu upp den tidsberoende Schrödingerekvationen och sätter in andraderivatans av $\psi(x)$:

$$\begin{aligned} -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\psi(x)}{dx^2} + U(x)\psi(x) &= E\psi(x) \\ -\frac{\hbar^2}{2m} \psi(x) \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{x}\right) + U(x)\psi(x) &= E\psi(x) \\ -\frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{x}\right) &= E - U(x) \\ -\frac{\hbar^2}{8m} + \frac{\hbar^2}{2mx} &= E - U(x). \end{aligned}$$

Vi identifierar nu den x -oberoende termen som energin och den x -beroende termen som $U(x)$:

$$\begin{aligned} E &= -\frac{\hbar^2}{8m} \\ U(x) &= -\frac{\hbar^2}{2mx}. \end{aligned}$$

7. Problem:

Två partiklar, den ena med massan $m_1 = m$, och den andra med massan $m_2 = 2m$, rör sig i labbsystemet rakt emot varandra med hastigheterna v_1 respektive v_2 .

Betrakta nu det speciella fall där labbsystemet är identiskt med masscentrumsystemet för de två partiklarna.

- a) Ta fram ett analytiskt uttryck för hur (v_1/c) beror av (v_2/c) - [3 p]
- b) Med förutsättningar som ovan, beräkna (v_1/c) för $(v_2/c) = 0.6$. [1 p]
- c) Med förutsättningar som ovan, beräkna (v_1/c) för $(v_2/c) = 0.001$. [1 p]

Lösning:

a) I masscentrumsystemet så har systemet som helhet inget rörelsemängdsmoment. Det betyder, om vi betraktar beloppet av hastigheterna, att följande samband gäller:

$$\begin{aligned} p_1 &= p_2 \\ m_1 \gamma_1 v_1 &= m_2 \gamma_2 v_2 \\ m \gamma_1 v_1 &= 2m \gamma_2 v_2 \\ \gamma_1 v_1 &= 2 \gamma_2 v_2 \\ \frac{\left(\frac{v_1}{c}\right)}{\sqrt{1 - \left(\frac{v_1}{c}\right)^2}} &= \frac{2 \left(\frac{v_2}{c}\right)}{\sqrt{1 - \left(\frac{v_2}{c}\right)^2}} \end{aligned}$$

där vi använt vilomassorna $v_1 = m, v_2 = 2m$ och uttrycket för den relativistiska rörelsemängden: $p = m\gamma v$. Efter lite algebra så får vi nu det efterfrågade sambandet mellan hastigheterna:

$$\left(\frac{v_1}{c}\right) = \frac{2}{\sqrt{\left(\frac{1}{\left(\frac{v_2}{c}\right)^2} + 3\right)}}$$

- b) Om vi sätter in värdet $v_2/c = 0.6$ så får vi $v_1/c = 0.83$.
- c) Om vi sätter in värdet $v_2/c = 0.001$ så får vi $v_1/c = 0.002$.

Notera att denna deluppgift, pga den låga hastigheten, alternativt kan lösas mycket enkelt med det klassiska sambandet för rörelsemängderna: $mv_1 = 2mv_2$ vilket direkt ger: $v_1 = 2v_2$.

8. Problem:

För ca 50 år sedan, i början av 1970-talet, så upptäckte Arne Johnson, då en ung doktorand på KTH, att tröghetsmomentet hos roterande atomkärnor ibland ändrar sig snabbt och dramatiskt i samband med att en kärnan ändrar sin rotationsenergi. Detta spektakulära fenomen kom att kallas *backbending*.

Roterande atomkärnor beskrivs med en liknande kvantformalism som roterande molekyler. Men till skillnad från molekyler så kan kärnornas tröghetsmoment inte direkt räknas ut från massorna. Tröghetsmomentet beror på atomkärnans inre struktur på ett icke-trivialt sätt, men det kan bestämmas experimentellt. Rotationsenergierna för en deformerad atomkärna ges av:

$$E_{\text{rot}} = \frac{\hbar^2}{2J} I(I+1),$$

där J är tröghetsmomentet och I är atomkärnans spinnkvanttal. Roterande atomkärnor byter spinn i steg om $\Delta I = 2$, och vi har tillstånden I^π (π markerar pariteten): $0^+, 2^+, 4^+, 6^+, \dots$ där 0^+ motsvarar grundtillståndet.

a) En roterande atomkärna har ett exciterat 2^+ -tillstånd vars rotationsenergi ligger 84 keV högre än grundtillståndet. Beräkna tröghetsmomentet. [2 p].

Med gammaspektroskopi så kan vi mäta upp energin mellan övergången från kvanttillståndet för ett visst spinn I och tillståndet under, dvs $I \rightarrow I-2$. I ett gammaspektrum till den roterande kärnan ^{162}Er har följande gamma-övergångar observerats (enhet keV): 102, 228, 337, 430, 506, 562, 581, 546, 555, 616. I tur och ordning så motsvarar dessa gammaenergierna spinn-övergångarna $2^+ \rightarrow 0^+, 4^+ \rightarrow 2^+, \dots$, hela vägen upp till $20^+ \rightarrow 18^+$.

b) Beräkna tröghetsmomentet för ^{162}Er både vid låga och höga spinn och jämför. Hur stor procentuell förändring av tröghetsmomentet kan vi observera mellan låga och höga spinn? [3 p]

Lösning:

a) För att räkna ut ett värde på J så kan vi här direkt använda värdet på E för tillståndet ifråga (för grundtillståndet vid $I = 0$ så är $E = 0$):

$$E_{\text{rot}} = \frac{\hbar^2}{2J} I(I+1) = \frac{\hbar^2}{2J} 2(2+1) = \frac{3\hbar^2}{J}$$

$$J = \frac{3\hbar^2}{E} = \frac{3}{4\pi^2} \frac{(4.13570 \cdot 10^{-15})^2 [\text{eV}^2 \text{s}^2]}{84 \cdot 10^3 [\text{eV}]} = 1.5468 \cdot 10^{-35} [\text{eVs}^2] = 2.4780 \cdot 10^{-54} [\text{J} \cdot \text{s}^2 = \text{kg} \cdot \text{m}^2].$$

Tröghetsmomentet är ca $2.5 \cdot 10^{-54} [\text{kg} \cdot \text{m}^2]$.

b) För att få ett värde på E så behöver vi lägga ihop alla gamma-energies från grundtillståndet upp till tillståndet i fråga, dvs: För $I = 2$ så har vi energin $E(2) = 102 \text{ keV}$, och för $I = 20$ så har vi energin $E(20) = 102 + 228 + 337 + 430 + 506 + 562 + 581 + 546 + 555 + 616 = 4463 \text{ keV}$. På samma sätt som i **(a)**-uppgiften så beräknar vi nu tröghetsmomentet för dessa två olika spin-kvanttal och jämför dem:

$$J(I=2) = \frac{\hbar^2}{2E} 2(2+1) = \frac{3\hbar^2}{102 [\text{keV}]} = 2.04 \cdot 10^{-54} [\text{kgm}^2]$$

$$J(I=20) = \frac{\hbar^2}{2E} 20(20+1) = \frac{210\hbar^2}{4463 [\text{keV}]} = 3.27 \cdot 10^{-54} [\text{kgm}^2]$$

Vi beräknar nu den procentuella förändringen $F = 100\Delta J/J(I=2)$ av tröghetsmomentet vid $I = 20$ i förhållande till $I = 2$:

$$F = \frac{100(J(I=20) - J(I=2))}{J(I=2)} = \frac{100 \left(\frac{210\hbar^2}{4463} - \frac{3\hbar^2}{102} \right)}{\frac{3\hbar^2}{102}} = 59.98 \approx 60.$$

Vi ser att tröghetsmomentet, J , ökar med 60% från låga till höga spinn (från $I = 2$ till $I = 20$ i detta fall).

Notera att det inte är möjligt att direkt lösa ut tröghetsmomentet endast från en enda övergång med en viss gammaenergi, E_γ . I det fallet så har vi ju två olika tröghetsmoment att ta hänsyn till. Tröghetsmomentet för ett visst tillstånd beror ju på tillståndets energi i förhållande till grundtillståndet, med ovanstående formalism.