

KTH FYSIK

TENTAMEN TEORETISK FYSIK SI1155

Torsdag 2024-08-15 kl 08:00-13:00

Skriv på varje sida Namn och problemnummer

Motivera noga Otillräckliga motiveringar leder till poängavdrag

Hjälpmedel BETA, miniräknare, linjal, formelblad på skrivningens sida 3-5

Poängsättning 6 poäng per problem

Examinator Mats Wallin tel 073 765 2000

1. Ett elektronspinn är i tillståndet

$$|\Psi\rangle = N(3|+z\rangle + 4|-z\rangle)$$

där $|+z\rangle$ betecknar spinn upp i z-riktningen och $|-z\rangle$ betecknar spinn ner i z-riktningen.

(a) Bestäm N .

(b) Bestäm möjliga värden som en mätning av S_z kan ge samt sannolikheten att få dessa resultat.

(c) Bestäm möjliga värden som en mätning av S_x kan ge samt sannolikheten att få dessa resultat.

(d) Antag att en mätning av S_z ger spinn ner. Efter denna mätning görs en andra mätning av spinnet, denna gång av S_x . Vilka resultat kan denna mätning ge och med vilka sannolikheter fås dessa?

2. Vätes grundtillstånd är

$$\psi = Ce^{-r/a}, \quad E_1 = -\frac{\hbar^2}{2ma^2}$$

där C, a är konstanter och r är avståndet mellan protonen och elektronen. Beräkna $C, \langle x \rangle, \langle p_x \rangle, \Delta x$ och Δp_x . Användbar integralformel:

$$\int_0^\infty x^n e^{-ax} dx = \frac{n!}{a^{n+1}}$$

VÄND!

3. Natriums atomkärna har spinn $3/2$ och magnetiskt moment $\boldsymbol{\mu} = (g_{\text{Na}}e/2m_p)\mathbf{S}$ med gyromagnetisk konstant $g_{\text{Na}} = 1.48$. En natriumkärna placeras i ett konstant magnetfält med storlek B_0 . Hamiltonoperatoren är $H = -\boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{B}$. En störning i form av ett ytterligare magnetfält med storlek B_1 adderas i samma riktning som det ursprungliga fältet. Bestäm energinivåerna (a) med första ordningens störningsräkning och (b) genom att lösa problemet exakt.

4. Två växelverkande särskiljbara spinn $1/2$ partiklar har Hamiltonoperatoren

$$H = -J\mathbf{S}_1 \cdot \mathbf{S}_2$$

(a) Bestäm grundtillståndsenergin i fallen $J > 0$ och $J < 0$. Ange degenerationen.
 (b) Antag att systemet är i initialtillståndet $|\Psi(0)\rangle = |\uparrow\downarrow\rangle$ vid tiden $t = 0$, dvs partikel 1 har spinn upp och partikel 2 har spinn ner i z-riktningen. Bestäm tillståndet $|\Psi(t)\rangle$ vid tiden t . Återgår tillståndet till initialtillståndet vid någon tid $t > 0$? Ange i så fall den minsta sådana tiden.

5. Två växelverkande partiklar har Hamiltonoperatoren $H = H^0 + V$ där

$$H^0 = -\frac{\hbar^2}{2m}(\nabla_1^2 + \nabla_2^2) + \frac{1}{2}m\omega^2(r_1^2 + r_2^2)$$

$$V = A(x_1x_2 + y_1y_2 - 2z_1z_2)$$

där A är en konstant och $r_1^2 = x_1^2 + y_1^2 + z_1^2$ osv. Bestäm grundtillståndsenergin till lägsta nollskilda ordningen i A .

LYCKA TILL!

Lösningar

1. Ett elektronspinn är i tillståndet

$$|\Psi\rangle = N(3|+z\rangle + 4|-z\rangle)$$

där $|+z\rangle$ betecknar spinn upp i z-riktningen och $|-z\rangle$ betecknar spinn ner i z-riktningen.

(a) Bestäm N .

(b) Bestäm möjliga värden som en mätning av S_z kan ge samt sannolikheten att få dessa resultat.

(c) Bestäm möjliga värden som en mätning av S_x kan ge samt sannolikheten att få dessa resultat.

(d) Antag att en mätning av S_z ger spinn ner. Efter denna mätning görs en andra mätning av spinnet, denna gång av S_x . Vilka resultat kan denna mätning ge och med vilka sannolikheter fås dessa?

(a)

$$\langle\psi|\psi\rangle = |N|^2(3^2 + 4^2) = 25|N|^2 = 1$$

Tag $N = 1/5$.

(b) En mätning av S_z ger $+\hbar/2$ med sannolikhet $(3/5)^2 = 0.36$ och $-\hbar/2$ med sannolikhet $(4/5)^2 = 0.64$.

(c) Egentillstånden till S_x är $|\pm x\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ \pm 1 \end{pmatrix}$. En mätning av S_x ger $+\hbar/2$ med sannolikhet

$$|\langle +x|\psi\rangle|^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{25} \cdot \left| (1, 1) \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \right|^2 = \frac{49}{50} = 0.98$$

och $-\hbar/2$ med sannolikhet

$$|\langle +x|\psi\rangle|^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{25} \cdot \left| (1, -1) \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \right|^2 = \frac{1}{50} = 0.02$$

Kontroll: $0.98 + 0.02 = 1$. OK.

(d) Efter den första mätningen är tillståndet $|-z\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. En mätning av S_x ger $+\hbar/2$ med sannolikhet

$$|\langle +x|-z\rangle|^2 = \frac{1}{2} \left| (1, 1) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right|^2 = \frac{1}{2}$$

och $-\hbar/2$ med sannolikhet

$$|\langle -x|-z\rangle|^2 = \frac{1}{2}$$

2. Vätens grundtillstånd är

$$\psi = Ce^{-r/a}, \quad E_1 = -\frac{\hbar^2}{2ma^2}$$

där C, a är konstanter och r är avståndet mellan protonen och elektronen. Beräkna $C, \langle x \rangle, \langle p_x \rangle, \Delta x$ och Δp_x . Användbar integralformel:

$$\int_0^\infty x^n e^{-ax} dx = \frac{n!}{a^{n+1}}$$

$$\langle \psi | \psi \rangle = 4\pi |C|^2 \int_0^\infty e^{-2r/a} r^2 dr = 4\pi |C|^2 \frac{a^3}{4} = 1 \Rightarrow 4\pi |C|^2 = \frac{4}{a^3}$$

Tag

$$C = \frac{1}{\sqrt{\pi} a^{3/2}}, \quad \psi = \frac{1}{\sqrt{\pi} a^{3/2}} e^{-r/a}$$

I sfäriska koordinater är $x = r \sin \theta \cos \phi$ som har väntevärdet

$$\langle x \rangle = \int_0^\infty r^2 dr \int_0^\pi \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\phi r \sin \theta \cos \phi |\psi|^2 = 0$$

eftersom integralen av $\cos \phi$ över en hel period är noll. Ehrenfests teorem ger

$$\langle p_x \rangle = m \frac{d\langle x \rangle}{dt} = 0$$

För osäkerheterna behövs väntevärdena av x^2 och p_x^2 . Dessa beräknas enklast genom att använda tillståndets sfäriska symmetri:

$$\langle x^2 \rangle = \frac{1}{3} \langle r^2 \rangle = \frac{1}{3} 4\pi |C|^2 \int_0^\infty r^4 e^{-2r/a} dr = \frac{1}{3} \frac{4}{a^3} \frac{3a^5}{4} = a^2$$

Använd

$$E_1 = -\frac{\hbar^2}{2ma^2} = \frac{\langle p^2 \rangle}{2m} - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \langle 1/r \rangle$$

$$\langle 1/r \rangle = 4\pi |C|^2 \int_0^\infty r e^{-2r/a} dr = \frac{4}{a^3} \frac{a^2}{4} = \frac{1}{a}$$

Nu blir

$$\langle p_x^2 \rangle = \frac{1}{3} \langle p^2 \rangle = \frac{2m}{3} \left(-\frac{\hbar^2}{2ma^2} + \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 a} \right) = \frac{2m}{3} \left(-\frac{\hbar^2}{2ma^2} + \frac{\hbar^2}{ma^2} \right) = \frac{\hbar^2}{3a^2}$$

Detta ger

$$\Delta x = \sqrt{\langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2} = a$$

$$\Delta p_x = \sqrt{\langle p_x^2 \rangle - \langle p_x \rangle^2} = \frac{\hbar}{\sqrt{3}a}$$

Dessa uppfyller osäkerhetsrelationen: $\Delta x \Delta p_x = \frac{\hbar}{\sqrt{3}} \geq \frac{\hbar}{2}$.

3. Natriums atomkärna har spinn $3/2$ och magnetiskt moment $\boldsymbol{\mu} = (g_{\text{Na}}e/2m_p)\mathbf{S}$ med gyromagnetisk konstant $g_{\text{Na}} = 1.48$. En natriumkärna placeras i ett konstant magnetfält med storlek B_0 . Hamiltonoperatoren är $H = -\boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{B}$. En störning i form av ett ytterligare magnetfält med storlek B_1 adderas i samma riktning som det ursprungliga fältet. Bestäm energinivåerna (a) med första ordningens störningsräkning och (b) genom att lösa problemet exakt.

(a) För spinn $3/2$ är egenvärdena $S_z = \pm 3\hbar/2, \pm \hbar/2$. Välj z-axel i det pålagda fältets riktning så att $\mathbf{B} = (0, 0, B)$. Den ostörda Hamiltonoperatoren är då

$$H_0 = -\mu_z B_0 = -\omega_0 S_z = -\frac{\hbar\omega_0}{2} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

där $\omega_0 = g_{\text{Na}}eB_0/2m_p$. De ostörda egenvärdena är diagonalelementen:

$$E_0 = -\frac{3\hbar\omega_0}{2}, -\frac{\hbar\omega_0}{2}, \frac{\hbar\omega_0}{2}, \frac{3\hbar\omega_0}{2}$$

Störningen är

$$V = -\mu_z B_1 = -\frac{\hbar\omega_1}{2} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

där $\omega_1 = g_{\text{Na}}eB_1/2m_p$. Första ordningens energikorrektioner blir diagonalelementen:

$$E_1 = -\frac{3\hbar\omega_1}{2}, -\frac{\hbar\omega_1}{2}, \frac{\hbar\omega_1}{2}, \frac{3\hbar\omega_1}{2}$$

(b) Den störda Hamiltonoperatoren är

$$H = H_0 + V = -\frac{\hbar\omega}{2} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

där $\omega = \omega_0 + \omega_1 = g_{\text{Na}}e(B_0 + B_1)/2m_p$. De exakta energiegenvärdena är alltså

$$E = -\frac{3\hbar\omega}{2}, -\frac{\hbar\omega}{2}, \frac{\hbar\omega}{2}, \frac{3\hbar\omega}{2}$$

Alltså ger första ordningens störningsräkning den exakta lösningen i detta problem.

4. Två växelverkande särskiljbara spinn $1/2$ partiklar har Hamiltonoperatören

$$H = -J\mathbf{S}_1 \cdot \mathbf{S}_2$$

(a) Bestäm grundtillståndsenergin i fallen $J > 0$ och $J < 0$. Ange degenerationen.
 (b) Antag att systemet är i initialtillståndet $|\Psi(0)\rangle = \uparrow\downarrow$ vid tiden $t = 0$, dvs partikel 1 har spinn upp och partikel 2 har spinn ner i z-riktningen. Bestäm tillståndet $|\Psi(t)\rangle$ vid tiden t . Återgår tillståndet till initialtillståndet vid någon tid $t > 0$? Ange i så fall den minsta sådana tiden.

(a) Använd kopplad bas. Totalt spinn $\mathbf{S} = \mathbf{S}_1 + \mathbf{S}_2$ ger

$$S^2 = (\mathbf{S}_1 + \mathbf{S}_2)^2 = S_1^2 + S_2^2 + 2\mathbf{S}_1 \cdot \mathbf{S}_2$$

Hamiltonoperatören blir

$$H = -J\mathbf{S}_1 \cdot \mathbf{S}_2 = -\frac{J}{2}(S^2 - S_1^2 - S_2^2)$$

Eigenvärdena är

$$E(s) = -\frac{J}{2}(s(s+1) - 2 \cdot 1/2(1/2+1))\hbar^2 = -\frac{J}{2}(s(s+1) - 3/2)\hbar^2$$

$$E(s=1) = -\frac{J}{2}(s(s+1) - 3/2)\hbar^2 = -\frac{J}{4}\hbar^2$$

$$E(s=0) = -\frac{J}{2}(s(s+1) - 3/2)\hbar^2 = \frac{3J}{4}\hbar^2$$

Grundtillstånd för $J > 0$ är tripletten med energi $E(s=1) = -\frac{J}{4}\hbar^2$ som är trefalt degenererad. Grundtillståndet för $J < 0$ är singletten med energi $E(s=0) = \frac{3J}{4}\hbar^2$ som är odegenererad.

(b) Kopplade basvektorer:

$$|1, 1\rangle = \uparrow\uparrow, |1, 0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(\uparrow\downarrow + \downarrow\uparrow), |1, -1\rangle = \downarrow\downarrow, |0, 0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(\uparrow\downarrow - \downarrow\uparrow)$$

Utveckla initialtillståndet i den kopplade basen:

$$|\psi(t=0)\rangle = \uparrow\downarrow = \frac{1}{\sqrt{2}}(|1, 0\rangle + |0, 0\rangle)$$

Eftersom de kopplade basvektorerna är energiegentillstånd (stationära tillstånd) blir tillståndet vid tiden t

$$|\psi(t)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|1, 0\rangle e^{-iE(s=1)t/\hbar} + |0, 0\rangle e^{-iE(s=0)t/\hbar})$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}(|1, 0\rangle e^{iJ\hbar t/4} + |0, 0\rangle e^{-i3J\hbar t/4})$$

Samma fysikaliska tillstånd fås om en övergripande faktor $e^{iJ\hbar t/4}$ tas bort:

$$|\psi(t)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|1, 0\rangle + |0, 0\rangle e^{-iJ\hbar t})$$

Alltså återfås initialtillståndet om $e^{-iJ\hbar t} = 1$. Den minsta sådana tiden ges av $J\hbar t = 2\pi$ dvs $t = 2\pi/J\hbar$.

5. Två växelverkande partiklar har Hamiltonoperatoren $H = H^0 + V$ där

$$H^0 = -\frac{\hbar^2}{2m}(\nabla_1^2 + \nabla_2^2) + \frac{1}{2}m\omega^2(r_1^2 + r_2^2)$$

$$V = A(x_1x_2 + y_1y_2 - 2z_1z_2)$$

där A är en konstant och $r_1^2 = x_1^2 + y_1^2 + z_1^2$ osv. Bestäm grundtillståndsenergin till lägsta nollskilda ordningen i A .

Beteckna de ostörda egentillstånden med s :

$$|s\rangle = |n_{x1}, n_{y1}, n_{z1}, n_{x2}, n_{y2}, n_{z2}\rangle = |n_{x1}\rangle \otimes |n_{y1}\rangle \otimes |n_{z1}\rangle \otimes |n_{x2}\rangle \otimes |n_{y2}\rangle \otimes |n_{z2}\rangle$$

där $|n_{1x}\rangle$ osv är den endimensionella harmoniska oscillatorns egentillstånd. Beteckna grundtillståndet med g . Det ostörda grundtillståndet är

$$|g\rangle = |0, 0, 0, 0, 0, 0\rangle$$

Ostörda energiegenvärden:

$$\begin{aligned} E_s^0 &= (n_{x1} + 1/2 + n_{y1} + 1/2 + n_{z1} + 1/2 + n_{x2} + 1/2 + n_{y2} + 1/2 + n_{z2} + 1/2)\hbar\omega \\ &= (n_{x1} + n_{y1} + n_{z1} + n_{x2} + n_{y2} + n_{z2} + 3)\hbar\omega \end{aligned}$$

Den ostörda grundtillståndsenergin är $E_g^0 = 3\hbar\omega$.

Första ordningens korrektion till grundtillståndsenergin är $E_g^1 = 0$ eftersom grundtillståndsvågfunktionen är jämn och störningen udda i alla koordinaterna.

Lägsta nollskilda korrektionen fås med andra ordningens störningsteori:

$$E_g^2 = \sum_{s \neq g} \frac{|\langle s|V|g\rangle|^2}{E_g - E_s} = -\frac{A^2}{\hbar\omega} \sum_{s \neq g} \frac{|\langle s|(x_1x_2 + y_1y_2 - 2z_1z_2)|g\rangle|^2}{n_{x1} + n_{y1} + n_{z1} + n_{x2} + n_{y2} + n_{z2}}$$

där $s \neq g$ betyder $(n_{x1}, n_{y1}, n_{z1}, n_{x2}, n_{y2}, n_{z2}) \neq (0, 0, 0, 0, 0, 0)$. Beräkna matriselementen. Första termen är

$$\langle s|x_1x_2|g\rangle = \langle n_{x1}|x_1|0\rangle\langle n_{y1}|0\rangle\langle n_{z1}|0\rangle\langle n_{x2}|x_2|0\rangle\langle n_{y2}|0\rangle\langle n_{z2}|0\rangle$$

Termen är $= 0$ om inte $n_{x1} = n_{x2} = 1, n_{y1} = n_{z1} = n_{y2} = n_{z2} = 0$. Då blir termen

$$\langle 1|x|0\rangle^2 = \frac{\hbar}{2m\omega}\langle 1|a^\dagger + a|0\rangle^2 = \frac{\hbar}{2m\omega}$$

Den andra termen får samma värde om $n_{y1} = n_{y2} = 1, n_{x1} = n_{z1} = n_{x2} = n_{z2} = 0$ och noll annars. Den tredje termen blir

$$-2\frac{\hbar}{2m\omega}$$

om $n_{z1} = n_{z2} = 1, n_{x1} = n_{y1} = n_{x2} = n_{y2} = 0$. Sammantaget fås

$$E_g^2 = -\frac{A^2}{\hbar\omega} \frac{\hbar^2}{(2m\omega)^2} \frac{1+1+2^2}{2} = -\frac{3\hbar A^2}{4m^2\omega^3}$$

Grundtillståndsenergin till lägsta nollskilda ordning i A blir

$$E_g = 3\hbar\omega - \frac{3\hbar A^2}{4m^2\omega^3}$$

Kontrollera att svaret har dimension energi:

$$[V] = [Ax^2] = [E] = [m\omega^2 x^2] \Rightarrow [A] = [m\omega^2] \Rightarrow$$

$$[\hbar A^2/m^2\omega^3] = [\hbar m^2\omega^4/m^2\omega^3] = [\hbar\omega] = [E]$$

OK.