

Lösningsförslag till tentamen
den 21 december 2023

DEL I – GRUNDLÄGGANDE PROBLEM

1. Taylor serien kring 0 av funktionen $f(x) = \int_0^x \ln(1+t)dt$ är $a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots$.
Beräkna a_0, a_1, a_2 och a_3 . (4 p)

Lösningsförslag. □

Taylor serien kring 0 av funktionen $f(x)$:

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \dots$$

Därför har vi!

$$a_0 = f(0)$$

$$a_1 = f'(0)$$

$$a_2 = \frac{f''(0)}{2}$$

$$a_3 = \frac{f'''(0)}{6}$$

Först beräknar vi

$$a_0 = f(0) = \int_0^0 \ln(1+t)dt = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{a_0 = 0}$$

Enligt Analysens huvudsats $f'(x) = \left(\int_0^x \ln(1+t)dt \right)' = \ln(1+x)$

$$\text{Därför } a_1 = f'(0) = \ln(1+0) = \ln 1 = 0 \Rightarrow \boxed{a_1 = 0}$$

Sedan har vi att $f''(x) = (\ln(1+x))' = \frac{1}{1+x}$

$$\text{Så } a_2 = \frac{f''(0)}{2} = \frac{1}{2} \Rightarrow \boxed{a_2 = \frac{1}{2}}$$

För att beräkna a_3 , beräknar vi först $f'''(x)$:

$$f'''(x) = (f''(x))' = \left(\frac{1}{1+x} \right)' = -\frac{1}{(1+x)^2}$$

$$\text{Så : } a_3 = \frac{1}{6} \cdot \frac{-1}{(1+0)^2} = -\frac{1}{6} \Rightarrow \boxed{a_3 = -\frac{1}{6}}$$

2. Låt

$$f(x) = \begin{cases} \arctan \frac{1}{x-1} & x > 1 \\ b, & x = 1 \\ \frac{a(x^3-1)}{x^2-1}, & x < 1 \end{cases}$$

(a) Bestäm konstanten a och konstanten b så att funktionen f blir kontinuerlig.

(2 p)

(b) Undersök konvergens/divergens av $\int_0^\infty f(x)dx$.

(2 p)

Lösningsförslag.

□

a) Om $x \neq 1$ och $x \neq -1$, funktionen f är sammansättning av elementära funktioner, så f är kontinuerlig.

Om $x = 1$ vi behöver $\lim_{x \rightarrow 1+} f(x) = f(1) = \lim_{x \rightarrow 1-} f(x)$

för att ha f kontinuerlig i $x = 1$.

$$\lim_{x \rightarrow 1+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1+} \arctan \frac{1}{x-1} = \frac{\pi}{2} \Rightarrow f(1) = \boxed{b = \frac{\pi}{2}}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1-} \frac{a(x^3-1)}{x^2-1} = \lim_{x \rightarrow 1-} \frac{a(x-1)(x^2+x+1)}{(x-1)(x+1)} = \lim_{x \rightarrow 1-} \frac{a(x^2+x+1)}{x+1} = \frac{3}{2}a$$

$$\Rightarrow \frac{3}{2}a = f(1) = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \boxed{a = \frac{\pi}{3}}$$

Om $x = -1$: f är odefinierad och därför vi kan inte undersöka kontinuitet.

Svar: Om $a = \frac{\pi}{3}$ och $b = \frac{\pi}{2}$, f är kontinuerlig

(dus f är kontinuerlig i sitt definitionsmängd)

b) Vi använder jämförelsesatsen med gränsvärde:

$$(\text{Jämförelsesatsen II}): \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\arctan \frac{1}{x-1}}{\frac{1}{x-1}} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\arctan t}{t} =$$

$$= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{1+t^2} = 1. \text{ Därför } \int_5^\infty \arctan \frac{1}{x-1} dx \text{ konvergerar}$$

$$\text{om och endast om } \int_5^\infty \frac{1}{x-1} dx \text{ konvergerar. Men } \int_5^\infty \frac{1}{x-1} dx = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_5^R \frac{dx}{x-1} =$$

$$= \lim_{R \rightarrow \infty} \ln(x-1) = \infty \Rightarrow \int_5^\infty \frac{dx}{x-1} \text{ divergerar} \Rightarrow \int_5^\infty f(x) dx \text{ divergerar} \Rightarrow \int_0^\infty f(x) dx \text{ divergerar.}$$

3. Bestäm den lösning till differentialekvationen $y'' + 4y = \sin x$ för vilken $y(0) = 1$ och $y'(0) = 0$. (4 p)

Lösningsförslag.

Karakteristiska ekvationen $r^2 + 4 = 0$ ger $r_1 = 2i$, $r_2 = -2i$
 Så allmänna lösningar till den homogena ekvationen

$$y'' + 4y = 0 \quad \text{är:}$$

$$y_h = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x$$

För att finna en partikulär lösning vi söker den i form

$$y_p = D_1 \cos x + D_2 \sin x$$

$$y_p' = -D_1 \sin x + D_2 \cos x$$

$$y_p'' = -D_1 \cos x - D_2 \sin x$$

$$y_p'' + 4y_p = -D_1 \cos x - D_2 \sin x + 4D_1 \cos x + 4D_2 \sin x = \sin x$$

$$\Rightarrow 3D_1 \cos x + 3D_2 \sin x = \sin x$$

$$\Rightarrow D_1 = 0, D_2 = \frac{1}{3} \Rightarrow y_p = \frac{1}{3} \sin x$$

$$\Rightarrow \text{allmänna lösning är } y = y_h + y_p =$$

$$= C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x + \frac{1}{3} \sin x$$

$$y(0) = 1 : y(0) = C_1 \Rightarrow C_1 = 1$$

$$y'(x) = -2C_1 \sin 2x + 2C_2 \cos 2x + \frac{1}{3} \cos x$$

$$y'(0) = 2C_2 + \frac{1}{3} = 0 \Rightarrow C_2 = -\frac{1}{6}$$

$$\Rightarrow \text{lösning är: } y = \cos 2x - \frac{1}{6} \sin 2x + \frac{1}{3} \sin x$$

4. Låt $f(x) = x^3 - x^2 - |x|$ för $-1 \leq x \leq 2$.

(a) Bestäm de intervall där f är växande eller avtagande samt eventuella lokala max/min punkter för f . Är f deriverbar? Motivera ditt svar. (2 p)

(b) Bestäm de intervall där f är konvex/konkav och skissa noggrant grafen av f . (2 p)

Lösningsförslag.

□

För att kunna räkna ut och undersöka derivatan $f'(x)$ på ett enkelt sätt måste vi här skilja på följande tre fall enligt definitionen av $|x|$:

1. $-1 \leq x < 0$: Då gäller att $|x| = -x$ så att $f(x) = x^3 - x^2 + x$ och

$$f'(x) = 3x^2 - 2x + 1 \quad \text{och} \quad \text{alltså} \quad f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 2x + 1 = 0,$$

Som inte har någon reell lösning ($2^2 - 4 \cdot 3 < 0$).

2. $0 \leq x \leq 2$: Då gäller att $|x| = x$ så att $f(x) = x^3 - x^2 - x$ och

$$f'(x) = 3x^2 - 2x - 1 \quad \text{och} \quad \text{alltså} \quad f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 2x - 1 = 0$$

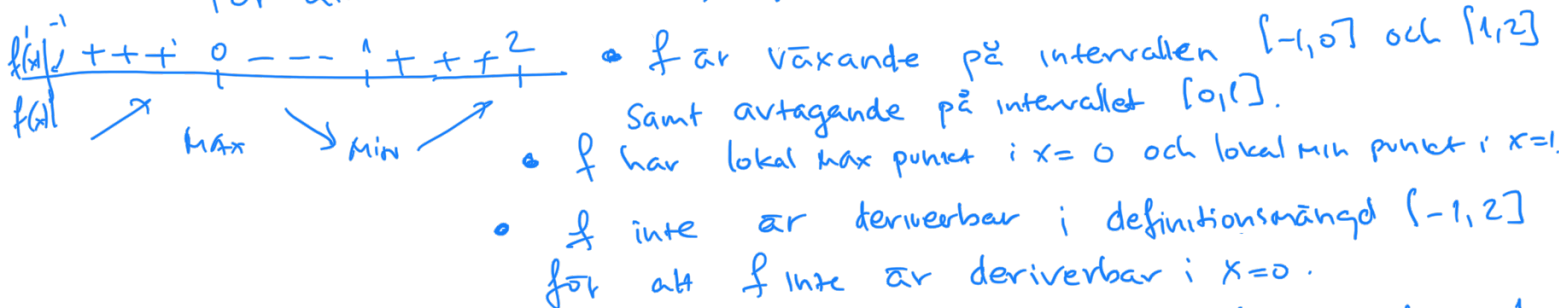
$$\Leftrightarrow x = 1 \quad \text{eller} \quad x = -\frac{1}{3}$$

Men observera att den enda lösningen som uppfyller villkoret $0 \leq x \leq 2$ är $x = 1$.

3. $x = 0$

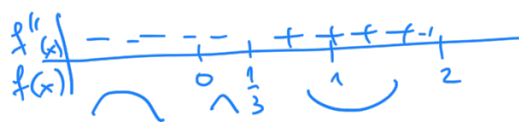
$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{h^3 - h^2 - h}{h} = -1; \quad \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{h^3 - h^2 + h}{h} = 1$$

För att vänster och höger gränsvärde skiljas åt $\Rightarrow f'(0)$ existerar inte.



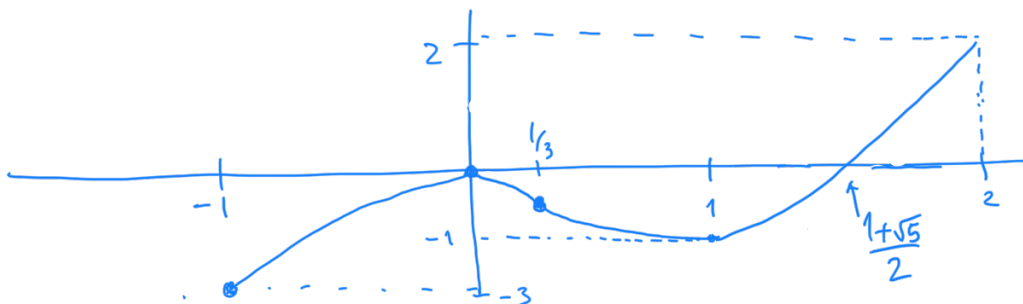
$$b) \quad f''(x) = \begin{cases} 6x - 2, & x \in [-1, 0) \\ 6x - 2, & x \in (0, 2] \end{cases}$$

$$6x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{3} \quad \text{och} \quad \begin{cases} f''(x) \leq 0 & \text{för } x \leq \frac{1}{3} \\ f''(x) > 0 & \text{för } x > \frac{1}{3} \end{cases}$$



$f(x)$ är konvex i $[\frac{1}{3}, 2]$

$f(x)$ är konkav i $[-1, 0)$ och $(0, \frac{1}{3}]$



5. Bestäm den största möjliga volymen V av en cylinder sådan att sammanlagda arean A av cylinderns sidoytor är given. (4 p)

Lösningsförslag.

□



$$V = hr^2\pi$$

$$A = 2r^2\pi + 2r\pi \cdot h \Rightarrow h = \frac{A - 2r^2\pi}{2r\pi}$$

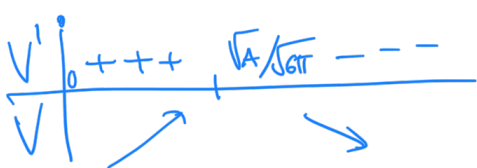
Vi skriver då V som en funktion av en variabel : $V = \frac{A - 2r^2\pi}{2r\pi} \cdot r^2\pi$

$$V = V(r) = \frac{A - 2r^2\pi}{2} \cdot r = \frac{Ar}{2} - r^3\pi$$

Nu beräknar vi globalt max punkt och max värde av V :

$$V'(r) = \frac{A}{2} - 3r^2\pi$$

$$V'(r) = 0 \Leftrightarrow \frac{A}{2} = 3r^2\pi \Leftrightarrow r^2 = \frac{A}{6\pi} \Leftrightarrow r = \frac{\sqrt{A}}{\sqrt{6\pi}}$$



V antar Maximum i $r = \frac{\sqrt{A}}{\sqrt{6\pi}}$

$$h = \frac{A - 2 \cdot \left(\frac{\sqrt{A}}{\sqrt{6\pi}}\right)^2 \pi}{2 \cdot \frac{\sqrt{A}}{\sqrt{6\pi}} \pi}$$

$$\text{Sedan : } V_{\max} = hr^2\pi = \frac{A - 2 \cdot \frac{A}{6}}{2 \cdot \frac{\sqrt{A}}{\sqrt{6\pi}} \pi} \cdot \frac{A}{6\pi} \pi = \frac{1}{18} A^2 \cdot \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{A} \sqrt{\pi}}$$

DEL II – AVANCERADE PROBLEM

6. (a) Definera vad som menas med att funktionen f är (Riemann) integrerbar på $[a, b]$.
(Dvs definiera integralen av f på $[a, b]$). (2 p)
- (b) Låt $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ vara strängt växande. Stämmer det att f är integrerbar på $[a, b]$?
Motivera ditt svar. (2 p)
- (c) Visa att $a_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{n+n}$ är en Riemannsumma till $\int_0^1 \frac{dx}{1+x}$. Använd detta
för att beräkna $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$. (2 p)

Lösningsförslag. (a) Se häftet. □

(b) Först observera att om f är växande på $[a, b]$ så är f begränsad för att $f(a) \leq f(x) \leq f(b)$ för alla $x \in [a, b]$.
Vi vet inte att om f är kontinuerlig, så Riemanns sats kan inte användas. Istället använder vi definitionen av integrerbarhet:

Låt $\varepsilon > 0$. Vi gör en uppdelning av $[a, b]$: $a = x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n \leq b = x_{n+1}$

S.a. $x_{k+1} - x_k \leq \frac{\varepsilon}{f(b) - f(a)}$ för varje $k \in \{1, \dots, n\}$

(OBS: f - strängt växande $\Rightarrow f(b) - f(a) \neq 0$)

Låt φ vara trappfunktionen: $\varphi(x) = \sup_{x \in [x_k, x_{k+1}]} f(x)$, $x \in [x_k, x_{k+1}]$, $k \in \{1, \dots, n\}$

Låt ψ vara trappfunktionen: $\psi(x) = \inf_{x \in [x_k, x_{k+1}]} f(x)$, $x \in [x_k, x_{k+1}]$, $k \in \{1, \dots, n\}$

då har vi att

$$\int_a^b \varphi(x) dx - \int_a^b \psi(x) dx = \sum_{k=1}^n \left(\sup_{x \in [x_k, x_{k+1}]} f(x) - \inf_{x \in [x_k, x_{k+1}]} f(x) \right) \cdot (x_{k+1} - x_k)$$

$$\leq \sum_{k=1}^n (f(x_{k+1}) - f(x_k)) \frac{\varepsilon}{f(b) - f(a)} = (f(b) - f(a)) \cdot \frac{\varepsilon}{f(b) - f(a)} < \varepsilon.$$

Det implicerar (enligt satsen som säger: begränsad f är integrerbar på $[a, b] \Leftrightarrow$ för varje $\varepsilon > 0$ finns undertrappa ψ och

en övertrappa φ s.a. $\int_a^b \varphi(x) dx - \int_a^b \psi(x) dx < \varepsilon$.)

(c) $\int_0^1 \frac{dx}{1+x} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{1}{1+\frac{k}{n}} \right) \frac{1}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n+k} = \lim_{n \rightarrow \infty} a_{n-1} = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$

På andra sidan: $\int_0^1 \frac{dx}{1+x} = \ln(1+x) \Big|_0^1 = \ln 2$

$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \ln 2.$

7. (a) Formulera satsen om mellanliggande värde. Ge ett exempel på en funktion som inte uppfyller satsen. (2 p)
 (b) Visa att ekvationen $e^x = x + 2$ har minst en lösning i intervallet $[0, 2]$. (1 p)
 (c) Visa att varje polynom av udda grad har minst ett reellt nollställe. (3 p)

Lösningsförslag. □

(a) Se häftet. Exempel: $f(x) = \begin{cases} -1, & x \in (-1, 0) \\ 1, & x \in [0, 1] \end{cases}$ inte uppfyller

Satsen för att för $c=0$ finns ingen $\xi \in [0, 1]$ s.a. $f(\xi)=0$.

(b) Vi definierar $f(x) = e^x - x - 2$. Som en summa av elementära funktioner, f är kontinuerlig.

Sedan: $f(0) = e^0 - 0 - 2 = -1$ och $f(2) = e^2 - 2 - 2 = e^2 - 4 > 0$

Så: $f(0) < 0$ och $f(2) > 0$. För att f är kontinuerlig, mellanliggande värde satsen appliceras och ger att det finns $\xi \in [0, 2]$ s.a. $f(\xi)=0$ dvs $e^\xi = \xi + 2$.

(c) Låt $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$

Om n är udda $\Rightarrow n-1$ är jämn. $\Rightarrow x^{n-1}$ är jämn funktion

$$P(x) = x^{n-1} \left(a_n x + a_{n-1} + a_{n-2} \cdot \frac{1}{x} + \dots + \frac{a_1}{x^{n-2}} + \frac{a_0}{x^{n-1}} \right)$$

$\underbrace{\hspace{15em}}_{g(x)}$

När $x \rightarrow \infty$, $\frac{1}{x} \rightarrow 0$ för varje $k \in \{1, \dots, n-2, n-1\}$

Vilken implicerar att det finns något M

Det följer direkt att $\frac{1}{|x|^k} \leq \frac{1}{|x|} < 1$ för $k \in \{1, \dots, n-2, n-1\}$.

Och för $|x| > 1$. Sedan har vi att $|g(x)| \leq M = \max\{a_{n-1}, \dots, a_1, a_0\}$

om $|x| > 1$. Det betyder att för $x = 2M$

$\text{Sgn } P(x) \neq \text{Sgn } P(-x)$ där Sgn betecknar tecknet

funktioner: $\text{Sgn}(y) = \begin{cases} 1, & y > 0 \\ 0, & y = 0 \\ -1, & y < 0 \end{cases}$

Enligt mellanliggandevärde satsen (Som kan användas för att P är en polynom och därmed kontinuerlig) det finns $\xi \in (-2M, 2M]$ s.a. $P(\xi) = 0$.

8. Bestäm om följande påståenden är sanna eller falska. Motivera ditt svar (dvs visa påståenden om de är sanna och ge motexempel om de är falska).

- (a) För varje positiv talföljd (a_n) (dvs $a_n > 0$ för alla $n \in \mathbb{N}$), serien $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ är konvergent om och endast om följderna av delsummor är uppåt begränsad. (3 p)
- (b) För varje positiv talföljd (a_n) , serien $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ är konvergent om och endast om (a_n) konvergerar mot noll. (3 p)

Lösningsförslag. □

(a) är Sant.
 Vi visar implikation ($\Rightarrow$): Anta att $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ är konvergent.

Enligt definitionen av serien konvergens har vi att talföljden av delsummor $S_n = \sum_{k=1}^n a_k$ är konvergent. Enligt satsen (som säger att varje konvergent talföljd är begränsad) så är S_n begränsad (som implikerar att om S_n är uppåt begränsad).

Vi visar implikation ($\Leftarrow$): Anta att S_n är uppåt begränsad.

$a_n > 0 \Rightarrow S_{n+1} > S_n \Rightarrow S_n$ är (strängt) växande.

Satsen säger att en växande och uppåt begränsad talföljd måste vara konvergent. Då är S_n konvergent. Enligt definitionen av serien konvergens, detta betyder att $\sum a_n$ är konvergent.

(b) är falskt för att implikation ($\Leftarrow$) inte gäller.

Vi ger motexempel: Låt a_k definieras av: $a_{2k} = \frac{1}{k}$, $a_{2k+1} = \frac{1}{2k}$

$$\text{Så är } \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n a_n = \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} \dots$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{8} + \dots = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots \right)$$

Och serien $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ är divergent, vilken implicerar

att $\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n a_n$ är divergent, och $a_n > 0$ för alla n
 och $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.