

Frågor med förslag till lösningar. OBS: detta dokument innehåller ej fullständiga lösningar!

Uppgift 1

Fråga

En partikel i en potential $V(x)$ har vågfunktionen

$$\begin{aligned}\Psi &= 2a^{3/2}xe^{-ax}, \text{ för } x > 0 \\ \Psi &= 0, \text{ för } x < 0\end{aligned}$$

Bestäm väntevärdena $\langle x \rangle$, $\langle p \rangle$ och osäkerheten Δx . [5p]

Integralen

$$\int_0^\infty r^m e^{-br} dr = \frac{m!}{b^{m+1}}$$

är användbar i detta problem.

Lösning

Med hjälp av formelbladet kan väntevärdena beräknas enligt följande:

$$\langle x \rangle = \int_0^\infty \Psi^* x \Psi dx = \int_0^\infty 4a^3 x^3 e^{-2ax} dx = \frac{3}{2a}$$

$$\langle x^2 \rangle = \int_0^\infty \Psi^* x^2 \Psi dx = 4a^3 \int_0^\infty x^4 e^{-2ax} dx = \frac{3}{a^2}$$

Osäkerheten ges av

$$\Delta x = \sqrt{\langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2} = \frac{\sqrt{3}}{2a}$$

Enligt formelbladet är rörelsemängdsoperatoren:

$$\hat{p} = -i\hbar \frac{d}{dx}$$

vilket ger väntevärdet:

$$\langle p \rangle = \int_0^\infty \Psi^* \left(-i\hbar \frac{d}{dx}\right) \Psi dx = 4a^3 \int_0^\infty x e^{-ax} (-i\hbar)(e^{-ax} - axe^{-ax}) dx = 0.$$

Uppgift 2

Fråga

En partikel med massan m och vågtalet k_1 rör sig (parallellt med x -axeln) till höger mot en potential. Vid $x = 0$, ändrar potentialens värde från noll till V och förblir vid detta värde för alla positiva x -värden.

- Dela upp i lämpliga regioner och ställ med kvantmekanisk formalism upp formen på partikelns vågfunktion. Använd först godtyckliga normaliseringskonstanter och ange om någon konstant är lika med 0. Ställ även upp alla relevanta randvillkor som gäller för vågfunktionen i detta fall. [2p]
- Om partiklens totala energi är $E = 2V$, vad är vågtalet k_2 i regionen $x > 0$? Uttryck ditt svar i k_1 . [1p]
- Beräkna reflektionskoefficienten R och transmissionskoefficienten T . [2p]

Lösning

a, b) Lösningen har formen

$$\Psi = Ae^{ik_1x} + Be^{-ik_1x}, \text{ för } x < 0$$

$$\Psi = Ce^{ik_2x}, \text{ för } x > 0$$

Insättning i den tidsberoende Schrödingerekvationen ger

$$x < 0 : \frac{\hbar^2 k_1^2}{2m} \Psi = E \Psi \Rightarrow k_1 = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar} = \frac{\sqrt{4mV}}{\hbar}$$

$$x > 0 : \frac{\hbar^2 k_2^2}{2m} \Psi + U \Psi = E \Psi \Rightarrow k_2 = \frac{\sqrt{2m(E - V)}}{\hbar} = \frac{\sqrt{2mV}}{\hbar} = \frac{k_1}{\sqrt{2}}$$

Kontinuitetsvillkoret för Ψ och $d\Psi/dx$ vid $x = 0$ ger:

$$A + B = C$$

$$ik_1 A - ik_1 B = ik_2 C$$

c) För att bestämma reflektionskoefficienten $R = |B|^2/|A|^2$ eliminerar vi C:

$$(k_2 - k_1)A + (k_1 + k_2)B = 0 \Rightarrow R = \frac{(k_1 - k_2)^2}{(k_1 + k_2)^2} = 0.03$$

$$T = R - 1 = 0.97$$

Uppgift 3

Fråga

En väteatom befinner sig i det exciterade tillståndet $2p$.

- a) Hur många sådana tillstånd är möjliga? [1p]
- b) Utgå ifrån formelsamlingens uttryck för väteatomens vågfunktioner. Beräkna den mest sannolika radien från atomkärnan, r_0 , uttryckt i a_0 . [4p]

Lösning

- a) Sex tillstånd $(nlm_l m_s) = (21 - 1 \frac{1}{2}), (21 - 1 - \frac{1}{2}), (210 \frac{1}{2}), (210 - \frac{1}{2}), (211 \frac{1}{2}), (211 - \frac{1}{2})$
- b) Sannolikhetsfunktionen $P(r)$ är:

$$P(r) = r^2 |R_{2,1}|^2 = r^2 \frac{1}{(2a_0)^3} \frac{r^2}{3a_0^3} e^{-r/a_0} = \frac{r^4}{24a_0^5} e^{-r/a_0}$$

Vi deriverar nu $P(r)$

$$\frac{d}{dr} P(r) = \frac{1}{24a_0^5} \frac{d}{dr} [r^4 e^{-r/a_0}] = \frac{1}{24a_0^5} e^{-r/a_0} [4r^3 - \frac{r^4}{a_0}]$$

För att få det mest sannolika avståndet r_0 sätter vi derivatan för $P(r)$ lika med 0:

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{24a_0^5} e^{-r/a_0} [4r^3 - \frac{r^4}{a_0}] = 0 \\ &\Rightarrow r_0 = 4a_0. \end{aligned}$$

Uppgift 4

Fråga

Högenergetiska gammafotoner kan växelverka med materia på huvudsakligen tre olika sätt: fotoelektrisk effekt, Comptonspridning och parbildning.

- a) Beskriv kortfattat dessa tre effekter. [2p]
- b) En gammafoton med energin 300 keV växelverkar med en elektron i en bit bly. Vilken/ vilka processer av de tre ovan nämnda effekterna är möjliga i detta fall? För varje fall som du anser är möjligt (om något), beräkna den högsta energi elektronen kan få de olika fallen. (Utträdesarbetet i bly är 4.14 eV). [3p]

Lösning

a) Hänvisas till sammanfattning av föreläsning 4.

b) Parbildning är inte möjlig för en gammafoton med energin 300 keV, eftersom vi för att bilda positron/elektron-paret behöver energin:

$$E = (m_{e^-} + m_{e^+})c^2 = 2 \times 511 \text{ keV} = 1022 \text{ keV}.$$

Detta är mer energi än den inkommande fotonen kan bidra med. Fotoelektrisk effekt och Comptonspridning är båda möjliga eftersom fotonens energi överstiger de atomära elektronernas bindningsenergier.

I fallet fotoelektrisk effekt är den högsta kinetiska energi som elektronen kan få:

$$T_e = E_f - \phi = 300 \text{ keV} - 4.14 \text{ eV} = 300 \text{ keV}.$$

För Comptonspridning, kan vi använda formeln som finns i formelbladet. Exempelvis har vi vid 180° spridning av den inkommande fotonen följande energi för den spridda fotonen:

$$\frac{1}{E'} - \frac{1}{300 \text{ keV}} = \frac{1 - \cos(180)}{m_e c^2}$$

$$E' = 138 \text{ keV}.$$

Elektronen får resten av energin, dvs $T_e = 300 - 138 = 162 \text{ keV}$.

Vid 180° spridning av den inkommande fotonen får den spridda fotonens energi E' sitt minsta möjliga värde medan elektronens energi T_e får sitt största möjliga värde.

Uppgift 5

Fråga

Neutroner från en reaktor kan användas för att studera kristallstruktur genom spridnings-experiment. I en reflektionsmätning fann man att neutroner med kinetisk energi 9 eV mot en NaCl-kristall hade ett reflektionsmaximum när vinkeln mellan inkommande och reflekterad stråle är 178° . Bestäm avståndet mellan kristallplanen i NaCl. [5p]

Lösning

$$\phi = 178^\circ, 2\theta = 180 - 178 \Rightarrow \theta = 1^\circ$$

Krav för reflektionsmaximum är:

$$n\lambda = 2d\sin\theta$$

$$n = 1 \Rightarrow d = \lambda/2\sin\theta$$

Vi känner λ och θ och kan då direkt beräkna d :

$$d = \frac{n\lambda}{2 \sin \theta}$$

$$T_n = \frac{p_n^2}{2m_n}, \quad m_n c^2 = 939.6 \text{ MeV} \Rightarrow p_n = 127 \text{ keV}$$

$$\lambda = h/p_n = 0.0976 \text{ Å}$$

$$d = \frac{\lambda}{2 \sin \theta} = 2.79 \text{ Å}$$

Uppgift 6

Fråga

Ett rymdskepp rör sig bort från jorden med farten v (nära ljushastigheten) relativt jorden. En rymdskytte avfyras från rymdskeppet i framåtriktningen med farten v relativt rymdskeppet. Piloten på rymdskeppet avfyrar därefter en rymdsond från rymdskytten i dess framåtriktning med farten v relativt rymdskytten.

- a) Bestäm rymdskyttes fart relativt jorden.
- b) Bestäm rymdsondens fart relativt jorden.

Lösning

a) Anta att vi har två inertialsystem, S (jorden) och S' (rymdskeppet). S' rör sig med konstant hastighet v , relativt S, i x-riktningen. Rymdskytten har farten $u'_x = v$ i S'. Vi kan använda formelbladet och beräkna $u_x = (u'_x + v)/(1 + u'_x v/c^2)$ i S.

$$u_x = \frac{2v}{1 + v^2/c^2}$$

b) Nu antar vi att inertialsystem S är jorden och S' är rymdskytten. S' rör sig med konstant hastighet $\tilde{v}$, relativt S, i x-riktningen. Rymdsondens fart relativt rymdskytten är: $u'_x = v$ och rymdsondens fart relativt jorden är: u_x .

$$u_x = \frac{u'_x + \tilde{v}}{1 + u'_x \tilde{v}/c^2}, \quad \tilde{v} = \frac{2v}{1 + v^2/c^2}$$

$$u_x = \frac{v(3 + \beta^2)}{1 + 3\beta^2}$$

där $\beta = v/c$.

Uppgift 7

Fråga

Följande diagram visar absorbtionsspektrum (intensitet vs energi) för elektromagnetisk strålning vid övergångar i HBr molekylen där vibrationskvanttalet ändras från 0 till 1.

- Varför saknas det en övergång i mitten? [1p]
- Beräkna kraftkonstanten för denna molekylen. [2p]
- Beräkna jämviktsavståndet mellan atomerna för denna molekylen. [2p]

Lösning

a) En övergång i mitten saknas vid energin ≈ 0.317 eV. Denna energi motsvarar $\Delta J = 0$ och ger då energin för vibrationsövergången $\Delta E \approx 0.317$ eV. Se Harris, Kap.10, Rotation and Vibration, s. 432.

b) HBr molekylen energi beror på rotations och vibrationskvanttalen J och V , $E = E_{rot} + E_{vib}$. För $\Delta J = 0$ är $\Delta E = \Delta E_{vib}$.

Vid övergången där vibrationskvanttalet V ändras från 0 till 1, har vi

$$\Delta E_{vib} = 3/2 h\nu_0 - 1/2 h\nu_0 = h\nu_0$$

$$0.317 \text{ eV} = h\nu_0 = h/2\pi \sqrt{\frac{k}{\mu}}$$

$$\mu = \frac{m_H \cdot m_{Br}}{m_H + m_{Br}} = \frac{1.0079 \cdot 79.904}{1.0079 + 79.904} = 0.995 \text{ u} \cdot 1.66 \cdot 10^{-27} \text{ kg/u} = 1.653 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$$

Vi får

$$k = (\Delta E_{vib}/\hbar)^2 \mu \approx 383 \text{ N/m}$$

c) Vid rotationsövergången $J + 1 \Rightarrow J$ fås

$$\Delta E_{rot} = E(J + 1) - E(J) = \frac{\hbar^2(J + 1)}{I}.$$

Rotationsövergången $1 \Rightarrow 0$ är den första övergången till höger om övergången i mitten som saknas ($\Delta J = 0$) och har energin 0.318 eV.

Vi får då att

$$\Delta E_{rot} = \frac{\hbar^2(J + 1)}{I} = \frac{\hbar^2}{\mu R^2} = 0.318 \text{ eV} \quad \Rightarrow \quad R \approx 1 \text{ Å}$$

Uppgift 8

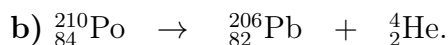
Fråga

De vanligaste sönderfallssätten för atomkärnor är β^+ -sönderfall, β^- -sönderfall och α -sönderfall.

- Beskriv schematiskt vad som sker vid dessa sönderfall, dvs vilka partiklar som emitteras från atomkärnan i respektive fall. [2p]
- Isotopen ^{210}Po α -sönderfaller och har en halveringstid på 138.4 d. Vilken blir dotterkärnan? [1p]
- Utgå från atomära massor och beräkna Q-värdet samt alfapartiklens kinetiska energi. [2p]

Lösning

a) Hänvisas till sammanfattning av föreläsning 12 och Harris bok, kap.12, sida: 539 - 542.



c) $Q = (m_{\text{före}} - m_{\text{efter}})c^2$

$$Q = m(^{210}\text{Po})c^2 - m(^{206}\text{Pb})c^2 - m(^4\text{He})c^2 = T_{4\text{He}} + T_{206\text{Pb}}$$

där $m = M - Zm_e$, m är kärnmassan och M är atommassan.

$$Q = M(^{210}\text{Po})c^2 - M(^{206}\text{Pb})c^2 - M(^4\text{He})c^2$$

Från tabellen (Appendix D, Table of Atomic Masses) får man:

$$M(^{210}\text{Po}) = 209.983 \text{ u},$$

$$M(^{206}\text{Pb}) = 205.975 \text{ u}$$

och från formelbladet får man: $M(^4\text{He}) = 4.002 \text{ u}$

$$\Rightarrow Q = 0.006 \text{ uc}^2 = 5.58 \text{ MeV}$$

Bevarande av energi och rörelsemängd ger:

$$T_\alpha = \frac{Q}{1 + m(\alpha)/m(^{206}\text{Pb})} = 5.48 \text{ MeV}$$