



Lösningsförslag till tentamen
Måndagen den 4 maj 2020

1. Bestäm den lösningen till differentialekvationen

$$y'' - 4y' + 4y = 4e^{4x}$$

som uppfyller att $y(0) = y'(0) = 0$.

Lösningsförslag. Vi börjar med att hitta en partikulärlösning till differentialekvationen. Vi gissa att lösningen är av formen $y_p = Ae^{4x}$. Då har vi att $y'_p = 4Ae^{4x}$ och $y''_p = 16Ae^{4x}$. Detta ger oss att

$$y'' - 4y' + 4y = A(16e^{4x} - 16e^{4x} + 4e^{4x}) = 4e^{4x}.$$

vilket ger $A = 1$ eller $y_p = e^{4x}$.

Nu letar vi efter den allmänna lösningen till den homogena differentialekvationen $y'' - 4y' + 4y = 0$. Vi kolla på den karakteristiska ekvationen $r^2 - 4r + 4 = (r - 2)^2 = 0$ vilket har lösningen $r = 2$. Enligt en sats har vi att den allmänna lösningen till den homogena differentialekvationen är

$$y_h = C_1e^{2x} + C_2xe^{2x}.$$

Nu har vi att den allmänna lösningen till den differentialekvationen $y'' - 4y' + 4y = 4e^{4x}$ är

$$y = y_p + y_h = C_1e^{2x} + C_2xe^{2x} + e^{4x}.$$

Till sist måste vi hitta C_1 och C_2 sådana att $y(0) = y'(0) = 0$. Vi har

$$y'(x) = 2C_1e^{2x} + C_2e^{2x} + 2C_2xe^{2x} + 4e^{4x},$$

vilket ger $y(0) = C_1 + 1$ och $y'(0) = 2C_1 + C_2 + 4$. Detta ger att $C_1 = -1$ och $C_2 = -2$, d.v.s. att

$$y(x) = -e^{2x} - 2xe^{2x} + e^{4x}.$$

Svar.

$$y(x) = -e^{2x} - 2xe^{2x} + e^{4x}$$