

Tentamen för SH1014 Modern fysik

⇒ Lösningsförslag: inkluderade!

2025-04-25, 14:00–19:00, KTH, Stockholm

Examinator/lärare: Christian Ohm (070-091 91 05)

Tillåtna hjälpmedel: miniräknare, bifogat formelblad

Tentamen består av 8 problem som vardera ger maximalt 5 poäng. För godkänt krävs 20 poäng. Betyget baseras på uppnådd poäng enligt följande:

Betyg A:	36-40 points
B:	32-35.5 poäng
C:	28-31.5 poäng
D:	24-27.5 poäng
E:	20-23.5 poäng
Fx:	18-19.5 poäng
F:	0-17.5 poäng

Motivera dina svar tydligt med uträkningar, text, och figurer när det är lämpligt. Skriv tydligt och tänk på att svara med ett rimligt antal värdesiffror. Du får göra egna, rimliga uppskattningar när det behövs så länge du motiverar dem väl. Det ska framgå tydligt från din lösning vilka antaganden och uppskattningar du gjort.

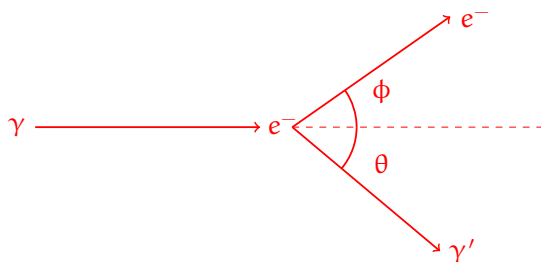
Lycka till! / Christian

Uppgift 1

Det är fortfarande 2025, året som Förenta Nationerna har deklarerat är "International Year of Quantum Science and Technology" för att uppmärksamma att det nu är 100 år sedan Heisenberg, Born, Schrödinger och Dirac gjorde stora framsteg med att formulera kvantmekaniken. Men dessa framsteg föregicks sedan 1900-talets början av flera upptäckter av fenomen som visade att naturen på liten skala är kvantiserad, och att partiklar beter sig vågor och vice versa.

- (a) Comptonspridning, en process där fotoner med hög energi växelverkar med en elektron, upptäcktes 1923. Rita upp ett diagram för processen då en foton träffar en fri elektron i vila, definiera vinklarna och energierna i figuren, och skriv ner uttrycket för sambandet mellan dem. [2p]

⇒ Lösningförslag: Diagrammet kan ritas tex så här, som i föreläsningssammanfattningen:



Sambandet mellan våglängdsskillnaden och vinkeln θ :

$$\lambda' - \lambda = \frac{h}{m_e c} (1 - \cos \theta). \quad (1)$$

Vi kan också uttrycka sambandet med fotonenergierna E och E' :

$$\frac{1}{E'} - \frac{1}{E} = \frac{1 - \cos \theta}{m_e c^2}. \quad (2)$$

- (b) För fallet som beskrevs i a), vid vilken spridningsvinkel för fotonen kan elektronen få högsta möjliga energi? [1p]

⇒ Lösningförslag: Enligt formelsamlingen gäller följande uttryck

$$\frac{1}{E'} - \frac{1}{E} = \frac{1 - \cos \theta}{m_e c^2},$$

där fotonens energi i sluttillståndet ges av E' . Elektronen kommer att få som högst energi när fotonen "studsar" tillbaka därifrån den kom, dvs då $\theta = 180^\circ$.

- (c) Isotopen ^{137}Cs är en radioaktiv isotop som uppstår i kärnreaktorer där ^{235}U används som bränsle. Halveringstiden för ^{137}Cs är ca 30 år, och sönderfallen sker genom β^- -sönderfall, primärt till ^{137m}Ba , som i sin tur genomgår γ -sönderfall som ger fotoner med $E_\gamma = 662 \text{ keV}$. Vilka våglängder kan dessa fotoner ha efter att ha genomgått Comptonspridning en gång? **[2p]** $\Rightarrow$ Lösningförslag: Vi kan ni använda sambandet för våglängderna i stället:

$$\lambda' - \lambda = \frac{h}{m_e c}(1 - \cos \theta) \Leftrightarrow \lambda' = \frac{h}{m_e c}(1 - \cos \theta) + \lambda,$$

där $\lambda = hc/E_\gamma = 1.873 \times 10^{-12} \text{ m}$. Sätter vi in h, c, m_e och tittar på extremvärdena då $\cos \theta$ är 1 och -1 får vi att $1.87 \text{ pm} < \lambda' < 6.73 \text{ pm}$.

Uppgift 2

Schrödingers genombrott för ca 100 år sedan utgick ifrån ansatsen att för varje dynamiskt system existerar en vågfunktion $\Psi(x, t)$ som innehåller all information om systemet, och Schrödingerekvationen är en differentialekvation som löses av dessa vågfunktioner.

Vi tänker oss nu en partikel med massa m och energi E som rör sig längs x -axeln i en endimensionell potential $U(x)$. Partikelns (tidsberoende) vågfunktion kan skrivas

$$\psi(x) = \begin{cases} Ax^3 e^{-\alpha x}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$$

- (a) Normera vågfunktionen, dvs bestäm konstanten A . **[2p]**

$\Rightarrow$ Lösningförslag: Normeringskravet ger oss konstanten A genom

$$1 = A^2 \int_0^\infty x^6 e^{-2\alpha x} dx = \frac{A^2 6!}{(2\alpha)^7} \Rightarrow A = \sqrt{\frac{128\alpha^7}{720}} = \sqrt{\frac{8\alpha^7}{45}}.$$

- (b) Bestäm potentialen $U(x)$. **[2p]**

$\Rightarrow$ Lösningförslag: Potentialen kan identifieras om vi stoppar in vågfunktionen i Schrödingerekvationen.

$$\psi''(x) = A(6xe^{-\alpha x} - 6\alpha x^2 e^{-\alpha x} + \alpha^2 x^3 e^{-\alpha x}) \quad (3)$$

$$= Ax^3 e^{-\alpha x} \left(\frac{6}{x^2} - \frac{6\alpha}{x} + \alpha^2 \right) \quad (4)$$

$$= \psi(x) \left(\frac{6}{x^2} - \frac{6\alpha}{x} + \alpha^2 \right) \quad (5)$$

Insatt i S.E. fås nu

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\psi}{dx^2} + U(x)\psi(x) = E\psi(x) \Rightarrow \quad (6)$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \psi(x) \left(\frac{6}{x^2} - \frac{6\alpha}{x} + \alpha^2 \right) + U(x)\psi(x) = E\psi(x) \Rightarrow \quad (7)$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{6}{x^2} - \frac{6\alpha}{x} + \alpha^2 \right) + U(x) = E \quad (8)$$

där vi kan identifiera termerna som beror på x som tillhörande potentialen (och de övriga som tillhörande E):

$$U(x) = \frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{6}{x^2} - \frac{6\alpha}{x} \right)$$

(c) Bestäm energin E för partikeln. [1p]

$\Rightarrow$ Lösningförslag: Enligt ovan fås $E = -\frac{\hbar^2\alpha^2}{2m}$

Uppgift 3

Keplertteleskopet hittade 2015 exoplaneten K2-18b, och efter ytterligare spektroskopiska observationer med både Hubbleteleskopet (2019) och James Webbteleskopet (2023) sågs tecken på att vattenånga, koldioxid och metan verkar finnas i planens atmosfär. För en vecka sedan kom rapporter om att även *dimetylsulfid* kan finnas i atmosfären – en organisk svavelförening som på jorden i princip bara kan skapas av biologiskt liv, som tex bakterier och fytoplankton i haven. Eftersom detta skulle kunna vara ett möjligt tecken på utomjordiskt blev det stora rubriker och lyftes upp i nyhetsrapporteringen på tex SVT och SR i Sverige under veckan. Låt oss leka med tanken att det finns utomjordiskt liv på K2-18b, eller att det åtminstone verkar så sannolikt att vi skulle vilja åka dit för att utforska saken närmare.

- (a) K2-18b befinner sig på ett avstånd av 124 ljusår från jorden, så om det finns intelligent liv där som har uppfunnit väldigt känsliga radiomottagare så skulle de nyligen kunna ha uppmätt de första radiosändningarna som människor gjorde på jorden (och kanske snart få höra om det första Nobelpriset i fysik?). Vi vill nu skicka en bemannad farkost till K2-18b, med en besättning på fem personer som doktorerat i olika ämnen och därför är i 30-årsåldern, och vi vill att farkosten ska nå K2-18b senast då besättningen är i 60-årsåldern. Hur snabb behöver raketerna vara? [3p]

$\Rightarrow$ Lösningförslag: Uppgiften handlar om tidsdilatation, ett fenomen inom speciell relativitetsteori. Låt oss göra några definitioner:

- S är inertialramen i vila, dvs för en observatör på jorden, och S' är inertialramen för de upptäcktsresande i rymdraketen som färdas i full fart.
- Avståndet mellan K2-18b och jorden enligt en observatör i S : $d = 124$ ly
- Tid som passerar enligt resenärerna: $\Delta t' = 30$ år
- Rymdraketens hastighet v relativt jorden ska bestämmas

Tiden det tar att färdas från jorden till exoplaneten enligt en observatör i S är $\Delta t = d/v$, och sambandet för tidsdilatation ger $\Delta t = \gamma \Delta t'$ (kom ihåg att den kortaste tiden mellan två händelser alltid uppmäts i inertialramen där de sker på samma ställe, dvs i S' i detta fall), vilket ger oss

$$\gamma \Delta t' = \frac{d}{v} \Rightarrow \Delta t' = \frac{d}{v} \sqrt{1 - v^2/c^2}$$

Om vi löser för v får vi

$$v^2 \left(\frac{(\Delta t')^2}{d^2} + \frac{1}{c^2} \right) = 1 \Rightarrow \frac{v^2}{c^2} \left(\frac{(\Delta t')^2 c^2}{d^2} + 1 \right) = 1$$

Tittar vi på den första termen i parenteserna ser vi att de är $[\text{år}]^2 \times [\text{ljusår} / \text{år}]^2 / [\text{ljusår}]^2$, dvs dimensionslös, om vi sätter in sträcka i ljusår, tid i år, och ljusets hastighet som 1 ljusår per år. Vi får nu

$$\frac{v}{c} = \frac{1}{\sqrt{\frac{30^2 \times 1^2}{124^2} + 1}} \approx 0.972$$

Raketen behöver alltså färdas med drygt 97% av ljusets hastighet.

- (b) K2-18b har en radie som är ca 2,6 gånger större än jordens (som är ca 6370 km i genomsnitt). Vi färdas nu mot planeten med hastigheten som räknats fram i a) men bromsarna på vår raket har gått sönder, så vi flyger förbi strax bredvid. Längdkontraktion gör att den sfäriska planeten skulle se deformerad ut, tillplattad i vår färdriktning så att den blir pannkakslik. Hur tjock skulle vi uppmäta att denna (eventuellt utomjordingsbefolkade) pannkaka skulle vara? **[2p]**

$\Rightarrow$ Lösningsförslag: Vi har att $R_{\text{K2-18b}} = 2.6 \times 6370 \text{ km} = 16562 \text{ km}$. Vi har även att

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - 0.972^2}} \approx 4.25$$

Längdkontraktion gör att exoplaneten upplevs som kortare i vår färdriktning och tjockleken blir

$$L = L_0/\gamma = 2 \times 16562 \text{ km}/4.25 \approx 7794 \text{ km}$$

Planetpannkakans tjocklek uppmäts alltså till ca 7800 km.

Uppgift 4

En fri väteatom befinner sig i tillståndet $(n, l, m_l, m_s) = (3, 1, -1, \frac{1}{2})$ när den deexciterar till grundtillståndet och emitterar en foton.

- (a) Vilken våglängd får den emitterade fotonen? [2p]

⇒ Lösningförslag: Vi kan använda Bohrmodellen för att få ut energiskillnaden på det givna tillståndet och grundtillståndet:

$$E_\gamma = E_3 - E_1 = -13.6 \left(\frac{1}{3^2} - \frac{1}{1^2} \right) = 12.09 \text{ eV}$$

Med detta kan vi räkna ut våglängden:

$$\lambda = \frac{hc}{E_\gamma} = 102.6 \text{ nm} \approx 103 \text{ nm}$$

- (b) Väteatomen får en rekyl på grund av emissionen. Bestäm dess hastighet (riktning och fart) relativt inertialramen då det exciterade tillståndet var i vila. [3p]

⇒ Lösningförslag: Vid sönderfallet måste rörelsemängden bevaras, dvs

$$p_H + p_\gamma = 0 \Rightarrow p_H = -p_\gamma = -\frac{h}{\lambda}$$

Då $E_\gamma \ll m_H$ inser vi att hastigheten är låg, så vi kan räkna klassiskt:

$$v_H = \frac{p_H}{m_H} = -\frac{h}{\lambda m_H} = -3.86 \text{ m/s}$$

Dvs väteatomen kommer att röra sig i motsatt riktning mot fotonen, med en hastighet på ca 3.86 m/s.

Uppgift 5

Radioisotopen ^{209}Bi sönderfaller via α -sönderfall, med en halveringstid 1.9×10^{19} år, dvs mycket längre än universums ålder på 13,7 miljarder år. Pga den extremt långa halveringstiden detekterades detta sönderfall för första gången år 2003.

- (a) Vilken är dotterkärnan då ^{209}Bi sönderfaller? [2p]

⇒ Lösningförslag: Från det periodiska systemet så ser vi att vismut (Bi) har atomtalet (dvs protontalet): $Z = 83$. ^{209}Bi har masstalet $A = 209$ (och således neutrontalet $N = 209 - 83 = 126$). Vid α -sönderfall så får dotterkärnan en minskning av två protoner och två neutroner, dvs masstalet minskar med 4. Dotterkärnan måste alltså ha $A = 209 - 4 = 205$, $Z = 83 - 2 = 81$. Detta prototal motsvarar grundämnet tallium (Tl), och dotterkärnan är talliumisotopen ^{205}Tl .

- (b) Bestäm Q -värdet (i MeV) för α -sönderfallet av ^{209}Bi ? [2p]

⇒ Lösningförslag: Q -värdet motsvarar skillnaden i vilomassa före och efter sönderfallet:

$$Q = \Delta mc^2 = [M(^{209}\text{Bi}) - (M(^{205}\text{Tl}) + M(^4\text{He}))] c^2 \quad (9)$$

$$= (208.980398 - (204.974427 + 4.002603)) \text{ u} c^2 \quad (10)$$

$$\approx 0.003368 \text{ u} c^2 = (0.003368 \times 931.502 \text{ MeV}/c^2) c^2 \quad (11)$$

$$= 3.137 \text{ MeV} \quad (12)$$

(Obs! Notera att konventionen är att konsekvent använda atommassorna, dvs även för α -partikeln, eftersom elektronerna finns både före och efter sönderfallet och energin som deras massor utgör behöver redogöras för)

- (c) Bestäm α -partikelns kinetiska energi (i MeV). [1p]

⇒ Lösningförslag: Eftersom $Q \ll m_\alpha c^2$ kan vi räkna med klassiska formler. Vid sönderfallet delas energi motsvarande Q upp i rörelseenergi för alfa-partikeln dotterkärnan (de rör sig i motsatt riktning). Bevarande av energin ger

$$Q = E_\alpha + E_R = \frac{m_\alpha v_\alpha^2}{2} + \frac{m_R v_R^2}{2}$$

och bevarande av rörelsemängden ger

$$m_R v_R = m_\alpha v_\alpha$$

där storheter med index R hör till dotterkärnan. Löser vi de två ekvationerna för E_α får vi:

$$E_\alpha = \frac{Q}{1 + \frac{m_\alpha}{m_R}} \approx \frac{Q}{1 + \frac{4}{205}} \approx 4.08 \text{ MeV}$$

Uppgift 6

Inom kosmologin studeras universums uppkomst och utveckling, och kärnfysiken är ett viktigt verktyg när det gäller att förstå uppkomst och förekomst av olika grundämnen. De med atomnummer upp till järn kan skapas i fusionsprocesser inuti stjärnor, tyngre atomkärnor skapas då stjärnor exploderar (sk supernovor), medan de tyngsta grundämnena bara tros uppstå då två sk neutronstjärnor slås ihop. Uranet i jordskorpan är ett sådant tungt grundämne ($Z = 92$) och består idag till 0.72% av ^{235}U ($t_{1/2} = 7.04 \times 10^8$ år) och till 99.27% ^{238}U ($t_{1/2} = 4.46 \times 10^9$ år).

Låt oss nu göra antagandet att allt uran på jorden skapades i samma ihopslagning av två neutronstjärnor i närheten av där jorden finns idag, och förlitar oss på en viss modell för denna process som förutspår produktionsförhållandet $^{235}\text{U}/^{238}\text{U}$ till ungefär 1.65. Under dessa antaganden, hur länge sen inträffade neutronstjärnesammanslagningen? [5p]

⇒ Lösningförslag: Idag, vid tiden $t = t_{\text{nu}}$ har vi $N_{\text{U}235}/N_{\text{U}238} = 0.72/99.27$. Generellt gäller för sönderfall

$$N(t) = N(0)e^{-\lambda t} = N(0)e^{-t \ln 2 / t_{1/2}}$$

Enligt neutronstjärnemodellen har vi vid tiden $t = 0$ att $N_{\text{U}235}(0)/N_{\text{U}238}(0) = 1.65$.

$$\frac{N_{\text{U}235}(t_{\text{nu}})}{N_{\text{U}238}(t_{\text{nu}})} = \frac{0.72}{99.27} = \frac{N_{\text{U}235}(t_{\text{nu}})e^{-t \ln 2 / t_{1/2}^{235}}}{N_{\text{U}238}(t_{\text{nu}})e^{-t \ln 2 / t_{1/2}^{238}}} = 1.65e^{-t \ln 2 (\frac{1}{t_{1/2}^{235}} - \frac{1}{t_{1/2}^{238}})}$$

$$t_{\text{nu}} = \frac{\ln\left(\frac{0.72}{99.27 \times 1.65}\right)}{-\ln 2 \left(\frac{1}{t_{1/2}^{235}} - \frac{1}{t_{1/2}^{238}}\right)} = \dots = 6.54 \times 10^9 \text{ y}$$

Sammanslagningen av de två neutronstjärnorna har enligt dessa beräkningar skett för ca 6,5 miljarder år sedan (dvs innan jorden bildades).

Uppgift 7

Som vi redan nosat lite vid i Uppgift 3 kan spektroskopiska mätningar användas för få information om den kemiska sammansättningen av planeters atmosfärer, så vår kvantmekaniska förståelse av molekylfysik är alltså viktig för att förstå lära oss mer om astronomi och astrofysik.

- (a) Ta fram det generella uttrycket för $\Delta E(J)$, dvs energiskillnaden mellan två på varandra följande rotationsnivåer för en roterande molekyl. [2p]

⇒ Lösningförslag: Rotationsenergin för en molekyl ges av

$$E_{\text{rot}} = \frac{\hbar^2}{2I} J(J+1)$$

så mellan nivåerna $J = j$ och $J = j + 1$ får vi skillnaden

$$\Delta E_{\text{rot}} = \frac{\hbar^2}{2I} ((j+1)(j+1+1) - j(j+1)) = \frac{\hbar^2}{2I} (2j+2) = \frac{\hbar^2}{I} (j+1)$$

Det generella uttrycket blir alltså $\Delta E_{\text{rot}} = \frac{\hbar^2}{I} (J+1)$.

- (b) Kolmonoxidmolekylen, CO, kan exciteras genom rotation, och vi studerar absorptionsspektrumet för kolmonoxid i ljuset från en avlägsen nebulosa. En absorptionslinje är tydligt synlig vid frekvensen 0.115×10^{12} Hz, och vi vet att detta motsvarar övergången $J = 0 \rightarrow J = 1$. En mycket svagare linje kan också observeras vid 0.110×10^{12} Hz. De vanligaste isotoperna för kol och syre är ^{12}C respektive ^{16}O , och vi funderar nu på om den svagare absorptionslinjen kan vara orsakad av att en annan kolisotop än ^{12}C finns i nebulosan. Bestäm vilken kolisotop det är (på formen ^XA). [3p]

⇒ Lösningförslag: Här behöver vi använda två samband: energiskillnaden mellan två rotationstillstånd från ovan, och tröghetsmomentet som beror på atomernas massor.

Med $J = 0$ i uttrycket ovan får vi energiskillnaden $\Delta E_{\text{rot}} = \frac{\hbar^2}{I}$ - som övergår till energi för en foton med frekvenserna $\nu_1 = 0.115 \times 10^{12}$ Hz eller $\nu_1 = 0.110 \times 10^{12}$ Hz.

Tröghetsmomentet ges av $I = \mu R^2$ och beror via R på molekylen två massor enligt $I = M_O R_O^2 + M_C R_C^2 = \mu R^2$, där den reducerade massan μ ges av $\mu = \frac{M_O M_C}{M_O + M_C}$ och $R = R_C + R_O$.

Med ^{12}C och ^{16}O fås $\mu_1 \propto \frac{16 \times 12}{16+12}$, och med okänd kolisotop med atomnummer A fås $\mu_2 \propto \frac{16 \times A}{16+A}$. Vi kan nu ställa upp förhållandet mellan de två frekvenserna och koppla dessa till massorna:

$$\frac{0.115}{0.110} = \frac{h\nu_1}{h\nu_2} = \frac{\Delta E_{\text{rot}}^1}{\Delta E_{\text{rot}}^2} = \frac{\hbar^2/I_1}{\hbar^2/I_2} = \frac{I_2}{I_1} = \frac{\frac{16 \times A}{16+A}}{\frac{16 \times 12}{16+12}}$$

som efter lösning för A ger

$$A = \frac{16}{\frac{0.110}{0.115} \times \frac{28}{12} - 1} \approx 12.988$$

Detta är väldigt nära heltalet 13, så vi kan dra slutsatsen att den okända isotopen är ^{13}C

Kommentar: vi har här gjort två antaganden – vi har försummat den relativt lilla skillnaden i bindningsenergi för de två kolisotoperna, och även utgått ifrån att avståndet R inte påverkas av kolisotop.

Uppgift 8

Toppkvarken är partikeln med högst massa i Standardmodellen, och sönderfaller via $t \rightarrow b + W^+$. I toppkvarkens viloram, vad får W -bosonen och b -kvarken för energier och rörelsemängder efter sönderfallet? Massorna och andra egenskaper för partiklarna i Standardmodellen finns att tillgå i figuren nedan. [5p]

tre generationer av materia (fermioner)				växelverkan / krafter (bosoner)	
	I	II	III		
massa	$\approx 2.2 \text{ MeV}$	$\approx 1.3 \text{ GeV}$	$\approx 173 \text{ GeV}$	0	$\approx 125 \text{ GeV}$
laddning	$+2/3$	$+2/3$	$+2/3$	0	0
spinn	$1/2$	$1/2$	$1/2$	1	0
KVARKAR	 u upp	 c charm	 t topp	 g gluon	 H Higgs
	 d ner	 s sär	 b botten	 γ foton	
	 e elektron	 μ myon	 τ tau	 W W-boson	
	 ν_e elektron-neutrino	 ν_μ myon-neutrino	 ν_τ tau-neutrino	 Z Z-boson	
LEPTONER	$< 1.0 \text{ eV}$	$< 0.17 \text{ eV}$	$< 18.2 \text{ MeV}$	$\approx 91.2 \text{ GeV}$	
	0	0	0	0	
	$1/2$	$1/2$	$1/2$	1	
					VEKTORBOSONER KRAFTFÖRMEDLARE
					SKALÄRBOSONER

Obs! Massorna i figuren ovan är angivna i naturliga enheter, dvs med konventionen att $\hbar = c = 1$, så att energi, rörelsemängd och massa alla kan uttryckas i eV.

⇒ Lösningsförslag: Här behöver vi utnyttja att både rörelsemängd och energi bevaras i sönderfallet, från initialtillståndet (i) till sluttillståndet (f). Låt oss använda följande notation för partiklarnas massor, och energier och rörelsemängder i sluttillståndet, angivna i toppkvarkens inertialram:

- Toppkvarken: $m_t = 173 \text{ GeV}$, $E_t = m_t c^2$, $\vec{p}_t = 0$

- W -bosonen: $m_W = 80.4 \text{ GeV}$, E_W , $\vec{p}_W$
- b -kvarken: $m_b = 4.2 \text{ GeV}$, E_b , $\vec{p}_b$

Bevarande av rörelsemängden $\vec{p}_i = \vec{p}_f$ ger oss $0 = \vec{p}_W + \vec{p}_b$, dvs $p_W = p_b$ vilket vi helt enkelt kallar p . Bevarande av energin ger oss $m_t = E_W + E_b$. För varje partikel enskilt gäller dessutom att $E^2 = p^2 c^2 + m^2 c^4$, där m är partikelns vilomassa. Använder vi detta i ekvationen för den totala energin får vi

$$m_t c^2 = \sqrt{p^2 c^2 + m_W^2 c^4} + \sqrt{p^2 c^2 + m_b^2 c^4} \quad (13)$$

$$\left(m_t c^2 - \sqrt{p^2 c^2 + m_W^2 c^4} \right)^2 = p^2 c^2 + m_b^2 c^4 \quad (14)$$

$$m_t^2 c^4 - 2m_t c^2 \sqrt{p^2 c^2 + m_W^2 c^4} + p^2 c^2 + m_W^2 c^4 = p^2 c^2 + m_b^2 c^4 \quad (15)$$

$$2m_t c^2 \sqrt{p^2 c^2 + m_W^2 c^4} = m_t^2 c^4 + m_W^2 c^4 - m_b^2 c^4 \quad (16)$$

$$4m_t^2 c^2 (p^2 c^2 + m_W^2 c^4) = (m_t^2 c^4 + m_W^2 c^4 - m_b^2 c^4)^2 \quad (17)$$

$$p^2 c^2 = \frac{(m_t^2 c^4 + m_W^2 c^4 - m_b^2 c^4)^2}{4m_t^2 c^4} - m_W^2 c^4 \quad (18)$$

Vi har värden på alla dessa variabler, och med dessa får vi $p \approx 67.7 \text{ GeV}/c$. Via $E = \sqrt{p^2 c^2 + m^2 c^4}$ får vi sedan $E_W \approx 105.1 \text{ GeV}$ och $E_b \approx 67.9 \text{ GeV}$.

Några formler och konstanter

Version 3.5

SH1014 Modern fysik, tentamen i april 2025

Naturkonstanter

Ljusets hastighet i vacuum	c	$2.99792458 \cdot 10^8 \text{ m/s}$
Elektronens laddning	e	$1.6021766 \cdot 10^{-19} \text{ C}$
Dielektricitetskonst. i vakuum	ϵ_0	$8.854187 \cdot 10^{-12} \text{ F/m}$
Permeabiliteten i vakuum	μ_0	$4\pi \cdot 10^{-7} \text{ N/A}^2$
Plancks konstant	h	$6.62618 \cdot 10^{-34} \text{ J}\cdot\text{s} =$ $4.13570 \cdot 10^{-15} \text{ eV}\cdot\text{s}$
Boltzmanns konstant	k_B	$1.38065 \cdot 10^{-23} \text{ J/K}$
Avogadros tal	N_A	$6.022045 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}$
$1/4\pi\epsilon_0$		$8.98755 \cdot 10^9 \text{ Nm}^2/\text{C}^2$

Omvandlingsfaktorer och enheter

$1 \text{ eV} = 1.6021766 \cdot 10^{-19} \text{ J}$
$1 \text{ b [barn]} = 10^{-28} \text{ m}^2$
$1 \text{ u} = 931.502 \text{ MeV}/c^2 = 1.660566 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$
$1 \text{ Bq} = 1 \text{ sönderfall/s}$
$1 \text{ Ci} = 3.7 \cdot 10^{10} \text{ Bq}$
$1 \text{ Å [Ångström]} = 1 \cdot 10^{-10} \text{ m}$
$1 \text{ fm [fermi]} = 1 \cdot 10^{-15} \text{ m}$

Några matematiska formler

Följande integraler kan vara användbara:

$$\begin{aligned}\int_0^\infty r^m e^{-br} dr &= \frac{m!}{b^{m+1}} \\ \int_0^\infty e^{-bx^2} dx &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{b}} \\ \int_0^\infty x e^{-bx^2} dx &= \frac{1}{2b} \\ \int_0^\infty x^2 e^{-bx^2} dx &= \frac{1}{4b} \sqrt{\frac{\pi}{b}}\end{aligned}$$

Vilomassor

Partiklar:

	u [atomär massenhet]	MeV/c ²
Elektron	$5.485803 \cdot 10^{-4}$	0.511003
Proton	1.00727647	938.280
Neutron	1.00866501	939.573
Deutron	2.01355321	1875.628
Alfapartikel	4.00150618	3727.409
π^+		139.570
π^-		139.570
π^0		134.977

Atomer:

	u [atomär massenhet]	MeV/c ²
^1H	1.007825	
^2H	2.014101	
^3H	3.016049	
^4He	4.002603	
^{12}C	12.000000	
^{14}N	14.003074	
^{16}O	15.994914	
^{90}Sr	89.907737	
^{91}Sr	90.910203	
^{92}Sr	91.911037	
^{98}Zr	97.912734	
^{99}Zr	98.916512	
^{100}Zr	99.917761	
^{147}Ba	146.934945	
^{209}Po	208.982430	
^{239}Pu	239.052163	
^{240}Pu	240.053813	
^{241}Pu	241.056851	

Speciell Relativitetsteori

Lorentztransformationen

Två inertialsystem, S och S' . Vid $t = 0$ och $t' = 0$ befinner sig O och O' i samma punkt. S' rör sig med hastigheten v längst x -axeln relativt S . Lorentztransformationen:

$$\begin{aligned}x' &= \gamma(x - vt) \\y' &= y \\z' &= z \\t' &= \gamma(t - \frac{v}{c^2}x) \\ \gamma &= \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}.\end{aligned}$$

Den inversa Lorentztransformationen:

$$\begin{aligned}x &= \gamma(x' + vt') \\y &= y' \\z &= z' \\t &= \gamma(t' + \frac{v}{c^2}x').\end{aligned}$$

Dopplereffekten

Observerad frekvens f på ljuset då det utsänds från en ljuskälla som i sitt system har ljusfrekvensen f_0 då ljuskällan färdas med hastigheten v i vinkeln θ mot observatören. $\theta = 0$ motsvarar att källan rör sig *rakt ifrån* observatören.

$$f = \frac{f_0}{\gamma(1 + \frac{v}{c}\cos\theta)}.$$

Hastighetstransformationer

Transformation av hastigheter mellan S' och S :

$$\begin{aligned}u_x &= \frac{dx}{dt} = \frac{u'_x + v}{1 + \frac{v}{c^2}u'_x} \\u_y &= \frac{dy}{dt} = \frac{u'_y}{\gamma(1 + \frac{v}{c^2}u'_x)} \\u_z &= \frac{dz}{dt} = \frac{u'_z}{\gamma(1 + \frac{v}{c^2}u'_x)}\end{aligned}$$

Samband mellan rörelsemängd och energi

$$E^2 = p^2c^2 + m_0^2c^4$$

Vågor och Partiklar

Plancks strålningslag

$$\begin{aligned}I(\nu, T) &= \frac{2h\nu^3}{c^2} \frac{1}{e^{h\nu/kT} - 1} \left[\frac{W}{m^2} \frac{1}{Hz} \frac{1}{sr} \right] \\I(\lambda, T) &= \frac{2hc^2}{\lambda^5} \frac{1}{e^{hc/kT} - 1} \left[\frac{W}{m^2} \frac{1}{Hz} \frac{1}{sr} \right]\end{aligned}$$

Wiens förskjutningslag

$$\lambda_{\max} = \frac{2.898 \cdot 10^{-3} [m \cdot K]}{T [K]}$$

Comptonspridning

Då en inkommande foton med våglängden λ sprids (i vinkeln θ) mot en stillastående elektron så gäller:

$$\lambda' - \lambda = \frac{h}{m_e c} (1 - \cos\theta).$$

där λ' är våglängden för den spridda fotonen. För fotonenergierna gäller på motsvarande sätt:

$$\frac{1}{E'} - \frac{1}{E} = \frac{1 - \cos\theta}{m_e c^2}.$$

Kvantmekanik

Den tidsberoende en-dimensionella Schrödingerekvationen:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\psi(x)}{dx^2} + U(x)\psi(x) = E\psi(x)$$

Normaliseringsvillkor i en dimension:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\Psi(x)|^2 dx = 1.$$

Oändlig en-dim. lådpotential, lösning

$$E_n = \frac{n^2\pi^2\hbar^2}{2ma^2} = \left[\hbar = \frac{h}{2\pi} \right] = \frac{n^2h^2}{8ma^2} \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

$$\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right).$$

Harmonisk, oscillatorpotential, en-dim.:

Potential: $U(x) = \kappa x^2/2$.

Lösning:

$$E_n = \left(n + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega_0 \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots,$$

där $\omega_0 = \sqrt{\kappa/m}$.

Potentialbarriärer

Transmissionssannolikheten och reflektionssannolikheten vid en potentialbarriär beror av energin U_0 , dess längd a och den inkommande partikelns energin E .

Om $E > U_0$ så har vi:

$$R = \frac{\sin^2 \left[\sqrt{2m(E - U_0)}(a/\hbar) \right]}{\sin^2 \left[\sqrt{2m(E - U_0)}(a/\hbar) \right] + 4 \frac{E}{U_0} \left(\frac{E}{U_0} - 1 \right)} \quad (1)$$

$$T = \frac{4 \frac{E}{U_0} \left(\frac{E}{U_0} - 1 \right)}{\sin^2 \left[\sqrt{2m(E - U_0)}(a/\hbar) \right] + 4 \frac{E}{U_0} \left(\frac{E}{U_0} - 1 \right)} \quad (2)$$

Om $E < U_0$ så har vi:

$$R = \frac{\sinh^2 \left[\sqrt{2m(U_0 - E)}(a/\hbar) \right]}{\sinh^2 \left[\sqrt{2m(U_0 - E)}(a/\hbar) \right] + 4 \frac{E}{U_0} \left(1 - \frac{E}{U_0} \right)}$$
$$T = \frac{4 \frac{E}{U_0} \left(1 - \frac{E}{U_0} \right)}{\sinh^2 \left[\sqrt{2m(U_0 - E)}(a/\hbar) \right] + 4 \frac{E}{U_0} \left(1 - \frac{E}{U_0} \right)}$$

Tunnling genom bred potential:

$$T \approx 16 \frac{E}{U_0} (1 - E/U_0) e^{-2a\sqrt{2m(U_0 - E)}/\hbar} \quad ; \text{ om } a \gg \frac{1}{\alpha},$$

$$\text{där } \alpha = \sqrt{\frac{2m(U_0 - E)}{\hbar^2}}.$$

Operatorer

Exempel på operatorer (en-dim):

$$\hat{p} = -i\hbar \frac{d}{dx}$$
$$\hat{x} = x$$
$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + U(x) = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + U(x).$$

Den tidsberoende Schrödingerekvationen i operatorform:

$$\hat{H}\psi(x) = E\psi(x)$$

Väntevärde och osäkerhet

Väntevärdet $\bar{Q}$ för observabeln Q :

$$\bar{Q} = \int_{-\infty}^{\infty} \Psi^*(x, t) \hat{Q} \Psi(x, t) dx.$$

Osäkerheten ΔQ för en observabel Q skrivs nu:

$$\Delta Q = \sqrt{(\overline{Q^2}) - (\bar{Q})^2}$$

Väteatomen

Coulombpotential från punktkälla/proton:

$$V(\vec{r}) = -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r},$$

Kvanttal i lösningen för väteatomen

- huvudkvanttal, $n = 1, 2, 3, \dots$
- bankvanttal, $l = 0, 1, 2, \dots, n - 1$
- magnetiskt kvanttal, $m_l = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm l$
- spinnmagnetiskt kvanttal, $m_s = \pm \frac{1}{2}$

Vätelika atomer - energier

$$E_n = \frac{-m_e e^4 Z^2}{2(4\pi\epsilon_0)^2 \hbar^2} \cdot \frac{1}{n^2} = \frac{-Z^2 \cdot 13.6 \text{ [eV]}}{n^2}, \quad n = 1, 2, 3, \dots,$$

där Z är antalet protoner i atomkärnan ($Z = 1$ för väte).

Väteatomen - vågfunktioner

Vinkeldel

$$\Phi(\phi) = e^{im_l\phi}, \quad m_l = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

$$\Theta(\theta) = P_l^{m_l}(\cos\theta) \quad l = 0, 1, 2, \dots,$$
$$m_l = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm l.$$

l, m_l	$\Theta(\theta)_{l, m_l} \cdot \Phi_{m_l}(\phi) = Y_l^{m_l}$
$0, 0$	$\sqrt{\frac{1}{4\pi}}$
$1, 0$	$\sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos\theta$
$1, \pm 1$	$\sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin\theta e^{\pm i\phi}$

Radiell del

n, l	$R_{nl}(r)$
$1, 0$	$\frac{1}{a_0^{3/2}} 2e^{-r/a_0}$
$2, 0$	$\frac{2}{(2a_0)^{3/2}} \left(1 - \frac{r}{2a_0} \right) e^{-r/2a_0}$
$2, 1$	$\frac{1}{(2a_0)^{3/2}} \frac{r}{\sqrt{3} \cdot a_0} e^{-r/2a_0}$

Bohrradien a_0 skrivs:

$$a_0 = \frac{(4\pi\epsilon_0)\hbar^2}{me^2}$$

Med insatta naturkonstanter får vi $a_0 = 0.0529 \cdot 10^{-9}$ m.

Kvantiserat rörelsemängdsmoment

$|L| = \hbar\sqrt{l(l+1)}$ $l = 0, 1, 2, \dots, n-1$ $L_z = m_l\hbar$ $m_l = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm l$ $|S| = \hbar\sqrt{s(s+1)}$ $s = \frac{1}{2} \text{ (elektron)}$ $S_z = m_s\hbar$ $m_s = \pm \frac{1}{2}$

Magnetiskt dipolmoment

Magnetisk dipolmoment från banrörelse:

$$\bar{\mu}_L = -\frac{e}{2m_e}\bar{L}.$$

$$\mu_z = -\frac{e}{2m_e}L_z$$

Magnetisk dipolmoment från spinn:

$$\bar{\mu}_S = -g_s\frac{e}{2m_e}\bar{S}$$

Totalt magnetisk dipolmoment:

$$\bar{\mu} = \bar{\mu}_L + \bar{\mu}_S = -\frac{e}{2m}(\bar{L} + g_s\bar{S})$$

Potentiell energi för en magnetisk dipol, μ , i ett yttre magnetiskt fält, $\bar{B} = B_z$:

$$U = -\bar{\mu} \cdot \bar{B} = -\mu_z B$$

Spin-bankoppling

Magnetfältet som elektronen upplever från banrörelsen:

$$\bar{B}_L = \frac{\mu_0 e}{4\pi m_e r^3}\bar{L}, \tag{3}$$

Energiskift, ΔU :

$$\Delta U = \bar{\mu}_s \cdot \bar{B}_L = \frac{\mu_0 e^2}{4\pi m_e^2 r^3}(\bar{S} \cdot \bar{L}) \tag{4}$$

Spektroskopisk notation

- s** för $l = 0$
- p** för $l = 1$
- d** för $l = 2$
- f** för $l = 3$
- g** för $l = 4$
- h** för $l = 5$.

Molekylfysik

Reducerad massa:

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$$

Rotationsenergier:

$$E_{\text{rot}} = \frac{L^2}{2I} = \frac{\hbar^2}{2I}J(J+1) \qquad J = 0, 1, 2, 3, \dots,$$

där tröghetsmomentet $I = \mu R^2$.

Vibrationsenergier:

$$E_{\text{vib}} = (V + \frac{1}{2})h\nu_0 \qquad V = 0, 1, 2, 3, \dots,$$

där $\nu_0 = \frac{1}{2\pi}\sqrt{k/\mu}$.

Fasta tillståndets fysik

Fermi-Dirac-fördelningen:

$$N(\mathcal{E}) = \frac{1}{e^{(\mathcal{E}-\mathcal{E}_F)/k_B T} + 1}$$

Effektiv massa:

$$m_{\text{eff}} = \hbar^2 \left(\frac{d^2 \mathcal{E}}{dk^2} \right)^{-1}$$

Partikelfysik

Standardmodellen i tabellform:

	Fermioner				
Kvarkar	u upp	c charm	t topp	γ foton	H Higgs
	d ner	s sär	b botten	g gluon	Bosoner
	ν_e elektron-neutrino	ν_μ myon-neutrino	ν_τ tau-neutrino	Z_0 Z-boson	
	e elektron	μ myon	τ tauon	$W^\pm$ W-boson	

Periodiska systemet

123456789101112131415161718

Grundämne Nr Väte 1 H		grundämnets namn atomnummer Symbol																Helium 2 He	
Litium 3 Li	Beryllium 4 Be																Syre 8 O	Fluor 9 F	Neon 10 Ne
Natrium 11 Na	Magnesium 12 Mg																Svavel 16 S	Klor 17 Cl	Argon 18 Ar
Kalium 19 K	Kalcium 20 Ca	Skandium 21 Sc	Titan 22 Ti	Vanadin 23 V	Krom 24 Cr	Mangan 25 Mn	Järn 26 Fe	Kobolt 27 Co	Nickel 28 Ni	Koppar 29 Cu	Zink 30 Zn	Gallium 31 Ga	Germanium 32 Ge	Arsenik 33 As	Selen 34 Se	Brom 35 Br	Krypton 36 Kr		
Rubidium 37 Rb	Strontium 38 Sr	Yttrium 39 Y	Zirkonium 40 Zr	Niob 41 Nb	Molybden 42 Mo	Teknetium 43 Tc	Rutenium 44 Ru	Rodium 45 Rh	Palladium 46 Pd	Silver 47 Ag	Kadmium 48 Cd	Indium 49 In	Tenn 50 Sn	Antimon 51 Sb	Tellur 52 Te	Jod 53 I	Xenon 54 Xe		
Cesium 55 Cs	Barium 56 Ba	Lutetium 71 Lu	Hafnium 72 Hf	Tantal 73 Ta	Volfram 74 W	Rhenium 75 Re	Osmium 76 Os	Iridium 77 Ir	Platina 78 Pt	Guld 79 Au	Kvicksilver 80 Hg	Tallium 81 Tl	Bly 82 Pb	Vismut 83 Bi	Polonium 84 Po	Astat 85 At	Radon 86 Rn		
Francium 87 Fr	Radium 88 Ra	Lawrencium 103 Lr	Rutherfordium 104 Rf	Dubnium 105 Db	Seaborgium 106 Sg	Bohrium 107 Bh	Hassium 108 Hs	Meitnerium 109 Mt	Darmstadtium 110 Ds	Röntgenium 111 Rg	Copernicium 112 Cn	Nihonium 113 Nh	Flerovium 114 Fl	Moskovium 115 Mc	Livermorium 116 Lv	Tennes 117 Ts	Oganesson 118 Og		

Lantan 57 La	Cerium 58 Ce	Praseodym 59 Pr	Neodym 60 Nd	Prometium 61 Pm	Samarium 62 Sm	Europium 63 Eu	Gadolinium 64 Gd	Terbium 65 Tb	Dysprosium 66 Dy	Holmium 67 Ho	Erbium 68 Er	Tulium 69 Tm	Ytterbium 70 Yb
Aktinium 89 Ac	Torium 90 Th	Protaktinium 91 Pa	Uran 92 U	Neptunium 93 Np	Plutonium 94 Pu	Americium 95 Am	Curium 96 Cm	Berkelium 97 Bk	Californium 98 Cf	Einsteinium 99 Es	Fermium 100 Fm	Mendelevium 101 Md	Nobelium 102 No

A	Element	Mass [u]	A	Element	Mass [u]	A	Element	Mass [u]
192	Hg	191.965634	198	Tl	197.970483	204	Po	203.980318
192	Tl	191.972225	198	Pb	197.972033	204	At	203.987251
192	Pb	191.975785	198	Bi	197.979206	204	Rn	203.991428
192	Bi	191.985457	198	Po	197.983388	204	Fr	204.000653
192	Po	191.991335	198	At	197.992837	204	Ra	204.006499
193	Re	192.967470	198	Rn	197.998678	205	Au	204.979870
193	Os	192.964151	199	Ir	198.973804	205	Hg	204.976073
193	Ir	192.962926	199	Pt	198.970593	205	Tl	204.974427
193	Pt	192.962987	199	Au	198.968765	205	Pb	204.974481
193	Au	192.964149	199	Hg	198.968279	205	Bi	204.977389
193	Hg	192.966665	199	Tl	198.969877	205	Po	204.981203
193	Tl	192.970672	199	Pb	198.972916	205	At	204.986074
193	Pb	192.976173	199	Bi	198.977671	205	Rn	204.991718
193	Bi	192.982959	199	Po	198.983666	205	Fr	204.998593
193	Po	192.991025	199	At	198.990532	205	Ra	205.006268
193	At	192.999843	199	Rn	198.998370	206	Hg	205.977514
194	Re	193.970420	199	Fr	199.007258	206	Tl	205.976110
194	Os	193.965182	200	Pt	199.971440	206	Pb	205.974465
194	Ir	193.965078	200	Au	199.970725	206	Bi	205.978499
194	Pt	193.962680	200	Hg	199.968326	206	Po	205.980481
194	Au	193.965365	200	Tl	199.970962	206	At	205.986667
194	Hg	193.965439	200	Pb	199.971826	206	Rn	205.990214
194	Tl	193.971200	200	Bi	199.978131	206	Fr	205.998666
194	Pb	193.974012	200	Po	199.981798	206	Ra	206.003827
194	Bi	193.982833	200	At	199.990351	206	Ac	206.014504
194	Po	193.988185	200	Rn	199.995699	207	Hg	206.982588
194	At	193.998725	200	Fr	200.006572	207	Tl	206.977419
195	Os	194.968126	201	Pt	200.974512	207	Pb	206.975896
195	Ir	194.965979	201	Au	200.971657	207	Bi	206.978470
195	Pt	194.964791	201	Hg	200.970302	207	Po	206.981593
195	Au	194.965034	201	Tl	200.970818	207	At	206.985783
195	Hg	194.966720	201	Pb	200.972884	207	Rn	206.990734
195	Tl	194.969774	201	Bi	200.977009	207	Fr	206.996949
195	Pb	194.974542	201	Po	200.982259	207	Ra	207.003798
195	Bi	194.980650	201	At	200.988416	207	Ac	207.011949
195	Po	194.988110	201	Rn	200.995628	208	Hg	207.985940
195	At	194.996268	201	Fr	201.003860	208	Tl	207.982018
195	Rn	195.005437	202	Pt	201.975740	208	Pb	207.976652
196	Os	195.969639	202	Au	201.973805	208	Bi	207.979742
196	Ir	195.968396	202	Hg	201.970643	208	Po	207.981245
196	Pt	195.964951	202	Tl	201.972105	208	At	207.986589
196	Au	195.966569	202	Pb	201.972159	208	Rn	207.989642
196	Hg	195.965832	202	Bi	201.977742	208	Fr	207.997138
196	Tl	195.970481	202	Po	201.980757	208	Ra	208.001839
196	Pb	195.972774	202	At	201.988630	208	Ac	208.011551
196	Bi	195.980666	202	Rn	201.993263	209	Hg	208.991040
196	Po	195.985534	202	Fr	202.003372	209	Tl	208.985358
196	At	195.995788	202	Ra	202.009890	209	Pb	208.981090
196	Rn	196.002115	203	Au	202.975154	209	Bi	208.980398
197	Ir	196.969653	203	Hg	202.972872	209	Po	208.982430
197	Pt	196.967340	203	Tl	202.972344	209	At	208.986173
197	Au	196.966568	203	Pb	202.973390	209	Rn	208.990414
197	Hg	196.967212	203	Bi	202.976876	209	Fr	208.995953
197	Tl	196.969574	203	Po	202.981420	209	Ra	209.001991
197	Pb	196.973431	203	At	202.986941	209	Ac	209.009494
197	Bi	196.978864	203	Rn	202.993386	209	Th	209.017715
197	Po	196.985659	203	Fr	203.000924	210	Hg	209.994510
197	At	196.993189	203	Ra	203.009271	210	Tl	209.990073
197	Rn	197.001584	204	Au	203.977724	210	Pb	209.984188
198	Ir	197.972280	204	Hg	203.973493	210	Bi	209.984120
198	Pt	197.967892	204	Tl	203.973863	210	Po	209.982873
198	Au	197.968242	204	Pb	203.973043	210	At	209.987147
198	Hg	197.966769	204	Bi	203.977812	210	Rn	209.989696