



**Lösningsförslag till tentamen
13 januari 2025**

DEL I – GRUNDLÄGGANDE PROBLEM

1. Låt $V = \mathbb{C}_{\leq 5}[x]$ vara mängden av polynom av grad högst fem med komplexa koefficienter och låt $L : V \rightarrow V$ ges av $L(p(x)) = p''(x) + 2p(x)$. Bestäm en Jordanbas för L .

(4 p)

Lösningsförslag. Om vi väljer basen $\{x^i/i!\}_{i=0}^5$ får vi matrisen för L som

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Alltså är $(A - 2I)^3 = 0$ och $(A - 2I)^2 \neq 0$. De basvektorer som ligger i $\ker(A - 2I)^3$ men inte i $\ker(A - 2I)^2$ är $x^4/4!$ och $x^5/5!$. Vi får Jordanbasen genom att använda $(A - 2I)$ på dessa, vilket ger $\{1, x^2/2!, x^4/4!, x, x^3/3!, x^5/5!\}$.

Svar. En Jordanbas ges av $\{1, x^2/2!, x^4/4!, x, x^3/3!, x^5/5!\}$.

2. Låt $\langle \cdot | \cdot \rangle$ vara den inre produkt på $V = \mathbb{C}^2$ som ges av matrisen

$$G = \begin{bmatrix} 2 & i \\ -i & 2 \end{bmatrix}$$

och låt $L : V \longrightarrow V$ ges av matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2i \\ 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Bestäm matrisen för den adjungerade operatoren $L^\dagger$ genom att utgå från definitionen. (Det behövs inte någon ortogonal bas.) **(4 p)**

Lösningsförslag. Vi söker en matris B som uppfyller

$$(B\mathbf{x})^\dagger G \mathbf{y} = (\mathbf{x})^\dagger G A \mathbf{y}$$

för alla $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ i $\mathbb{C}^2$. Det är ekvivalent med $B^\dagger G = GA$, dvs $B = (GAG^{-1})^\dagger$. Vi har att

$$G^{-1} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 & -i \\ i & 2 \end{bmatrix}$$

och

$$\begin{aligned} B &= (G^{-1})^\dagger A^\dagger G^\dagger = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 & -i \\ i & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2i & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & i \\ -i & 2 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 & -i \\ i & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & i \\ -7i & 8 \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} -3 & -6i \\ -12i & 15 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -2i \\ -4i & 5 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Svar. Matrisen för $L^\dagger$ är $B = \begin{bmatrix} -1 & -2i \\ -4i & 5 \end{bmatrix}$.

3. Avgör om $K = \{aI + bA : a, b \in \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}\}$ är en kropp för var och en av matriserna A i mängden

$$\left\{ \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right\} \subseteq M_2(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}).$$

(4 p)

Lösningsförslag. Vi får en kropp precis om minimalpolynomet är irreducibelt. Vi kan se på de karakteristiska polynomen för matriserna. För en 2×2 -matris ges det karakteristiska polynomet av $p_A(x) = x^2 - \text{tr}(A)x + \det(A)$. För de fyra matriserna får vi därmed

$$\begin{aligned} x^2 + 2x + 1 &= (x+1)^2, \\ x^2 - x + 2, \\ x^2 + 1 &= (x-2)(x+2), \\ x^2 - x - 2 &= (x+1)(x-2) \end{aligned}$$

Eftersom $p(x) = x^2 - x + 2$ saknar nollställan i $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ är det bara den andra matrisen som ger en kropp. För de övriga finns nolldelare, t.ex. är $(A+I)^2 = 0$ för den första, $(A-2I)(A+2I) = 0$ för den tredje och $(A+I)(A-2I) = 0$ för den fjärde.

Svar. Det är bara den andra matrisen, $A = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ som gör att K blir en kropp.

DEL II – BEGREPP OCH SATSER

4. (a) Visa att det för en linjär avbildning $L : V \longrightarrow W$ gäller att L är injektiv om och endast om $\ker(L) = \{0\}$. **(1 p)**
- (b) Ge ett exempel på en injektiv linjär avbildning $L : V \longrightarrow W$ som inte är surjektiv. **(1 p)**
- (c) Formulera och bevisa dimensionssatsen för linjära avbildningar $L : V \longrightarrow W$. **(2 p)**

Lösningsförslag.

- (a) Om L är injektiv kan bara 0 avbildas på 0 och därmed är kärnan trivial. Om kärnan är trivial har vi att $L(\mathbf{x}) = L(\mathbf{y})$ medför att $L(\mathbf{x} - \mathbf{y}) = 0$, dvs $\mathbf{x} - \mathbf{y} = 0$, vilket visar att L är injektiv.
- (b) Om $V = \{0\}$ och $W \neq \{0\}$ finns bara nollavbildningen från V till W och den är injektiv eftersom kärnan är $\{0\}$, men den är inte surjektiv eftersom bildrummet är $\{0\} \neq W$.
- (c) Dimensionssatsen säger att om $L : V \longrightarrow W$ är en linjär avbildning och $\dim V < \infty$ så gäller

$$\dim V = \dim \ker(L) + \dim \operatorname{im}(L).$$

Vi kan bevisa den genom att välja ett komplement U till $\ker(L)$ i V och få att restriktionen av L till U är injektiv eftersom komplementet inte innehåller något element från kärnan utom nollvektorn. Alltså är $\dim U = \dim \operatorname{im}(L)$ och eftersom U är ett komplement till $\ker(L)$ är $\dim V = \dim \ker(L) + \dim U$.

5. (a) Ange en bas för $\bigwedge^m V$ om $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ är en bas för V . **(1 p)**
 (b) Ange det basbyte för $\bigwedge^2 \mathbb{C}^3$ som svarar mot basbytet för $\mathbb{C}^3$ mellan baserna $\{e_1, e_2, e_3\}$ och $\{f_1, f_2, f_3\}$ där $f_j = \sum_{i=1}^3 p_{ij} e_i$ för $j = 1, 2, 3$. **(1 p)**
 (c) Antag att $1 + 1 \neq 0$ i kroppen av skalärer. Visa att en multilinjär avbildning är *alternerande* om och endast om den är *skevsymmetrisk*. **(2 p)**

Lösningsförslag.

- (a) En bas för $\bigwedge^m V$ ges av

$$\{e_{i_1} \wedge e_{i_2} \wedge \dots \wedge e_{i_m} : 1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_m \leq n\}$$

- (b) En bas för $\bigwedge^2 \mathbb{C}^3$ ges av $\{e_1 \wedge e_2, e_1 \wedge e_3, e_2 \wedge e_3\}$. Om $f_j = \sum_{i=1}^3 p_{ij} e_i$ får vi

$$\begin{aligned} f_1 \wedge f_2 &= (p_{11}e_1 + p_{21}e_2 + p_{31}e_3) \wedge (p_{12}e_1 + p_{22}e_2 + p_{32}e_3) \\ &= (p_{11}p_{22} - p_{21}p_{12})e_1 \wedge e_2 + (p_{11}p_{32} - p_{31}p_{12})e_1 \wedge e_3 + (p_{21}p_{32} - p_{31}p_{22})e_2 \wedge e_3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_1 \wedge f_3 &= (p_{11}e_1 + p_{21}e_2 + p_{31}e_3) \wedge (p_{13}e_1 + p_{23}e_2 + p_{33}e_3) \\ &= (p_{11}p_{23} - p_{21}p_{13})e_1 \wedge e_2 + (p_{11}p_{33} - p_{31}p_{13})e_1 \wedge e_3 + (p_{21}p_{33} - p_{31}p_{23})e_2 \wedge e_3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_2 \wedge f_3 &= (p_{12}e_1 + p_{22}e_2 + p_{32}e_3) \wedge (p_{13}e_1 + p_{23}e_2 + p_{33}e_3) \\ &= (p_{12}p_{23} - p_{22}p_{13})e_1 \wedge e_2 + (p_{12}p_{33} - p_{32}p_{13})e_1 \wedge e_3 + (p_{22}p_{33} - p_{32}p_{23})e_2 \wedge e_3 \end{aligned}$$

Alltså ges basbytesmatrisen av

$$\begin{bmatrix} p_{11}p_{22} - p_{21}p_{12} & p_{11}p_{23} - p_{21}p_{13} & p_{12}p_{23} - p_{22}p_{13} \\ p_{11}p_{32} - p_{31}p_{12} & p_{11}p_{33} - p_{31}p_{13} & p_{12}p_{33} - p_{32}p_{13} \\ p_{21}p_{32} - p_{31}p_{22} & p_{21}p_{33} - p_{31}p_{23} & p_{22}p_{33} - p_{32}p_{23} \end{bmatrix}$$

- (c) En multilinjär avbildning $f: V^m = V \times V \times \dots \times V \longrightarrow U$ är

- *alternerande* om $f(x_1, x_2, \dots, x_m) = 0$ om två argument är lika, dvs $x_i = x_j$ för något $i \neq j$,
- *skevsymmetrisk* (eller antisymmetrisk) om $f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ byter tecken, men i övrigt inte ändras, om två argument byter plats.

Genom att fixera alla argument utom två så erhåller vi en bilinjär avbildning $g: V \times V \longrightarrow U$ och det räcker att bevisa satsen för alla sådana g . Om g är alternerande har vi att

$$0 = g(x + y, x + y) - g(x, x) - g(y, y) = g(x, y) + g(y, x)$$

för alla $x, y \in V$ och alltså är g skevsymmetrisk.

Om g är skevsymmetrisk har vi för alla $x \in V$ att

$$g(x, x) = -g(x, x) \iff 2g(x, x) = 0$$

Om $2 \neq 0$ följer alltså att $g(x, x) = 0$.

DEL III – AVANCERADE PROBLEM

6. Bestäm alla komplexa matriser som är samtidigt diagonaliserbara med både

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{och} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

(4 p)

Lösningsförslag. För att en matris X ska vara samtidigt diagonaliserbar med både A och B måste den kommutera med båda. Om vi skriver

$$X = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{bmatrix}$$

ges villkoret $BX = XB$ av

$$\begin{bmatrix} x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \\ x_{11} & x_{12} & x_{13} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{13} & x_{11} & x_{12} \\ x_{23} & x_{21} & x_{22} \\ x_{33} & x_{31} & x_{32} \end{bmatrix}$$

vilket ger $x_{11} = x_{22} = x_{33}$, $x_{12} = x_{23} = x_{31}$ och $x_{13} = x_{21} = x_{32}$. Villkoret $AX = XA$ ger nu

$$\begin{bmatrix} x_{13} & x_{11} & x_{12} \\ x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{12} & x_{13} & x_{11} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{12} & x_{11} & x_{13} \\ x_{11} & x_{13} & x_{12} \\ x_{13} & x_{12} & x_{11} \end{bmatrix}$$

vilket ger $x_{12} = x_{13}$. Sammantaget har vi att alla matriser på formen

$$X = \begin{bmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{bmatrix}$$

kommuterar med både A och B . Det återstår att kontrollera att alla tre matriser är diagonaliserbara. A är reell symmetrisk och därmed diagonaliserbar. B har karakteristiskt polynom $x^3 - 1 = (x - 1)(x - e^{2\pi i/3})(x - e^{4\pi i/3})$ och är diagonaliserbar eftersom algebraiska multipliciteten är 1 för alla egenvärden. Matrisen

$$J = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

är reell symmetrisk och är därmed diagonaliserbar. Därmed är $X = (a - b)I + bJ$ diagonaliserbar för alla komplexa tal a och b .

Svar. Det är matriser på formen

$$X = \begin{bmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{bmatrix}$$

som är samtidigt diagonaliserbara med både A och B .

7. Låt $\ell^2(\mathbb{C}) = \{\mathbf{x} = (x_i)_{i=0}^\infty \mid x_i \in \mathbb{C}, i \geq 0 \text{ och } \sum_{i=0}^\infty |x_i|^2 < \infty\}$ med inre produkt som ges av $\langle \mathbf{x} | \mathbf{y} \rangle = \sum_{i=0}^\infty \overline{x_i} y_i$ och låt $L : \ell^2(\mathbb{C}) \longrightarrow \ell^2(\mathbb{C})$ ges av $L(\mathbf{x})_i = x_{i+1}$, för $i \geq 0$.
- (a) Bestäm alla egenvärden och egenvektorer till L . (2 p)
- (b) Använd del (a) och algebrans fundamentalsats för att bestämma vilka polynom $p(x)$ i $\mathbb{C}[x]$ som uppfyller att $p(L)$ är injektiv. (2 p)

Lösningsförslag.

- (a) Om $\mathbf{x} \in \ker(L - \lambda I)$ har vi att $x_{i+1} - \lambda x_i = 0$, för alla $i \geq 0$. Det betyder att $x_i = \lambda^i x_0$. För att detta ska vara en egenvektor måste $x_0 \neq 0$ och $|\lambda| < 1$ eftersom $\sum_{i=0}^\infty |\lambda^i|^2$ divergerar om $|\lambda| \geq 1$ och konvergerar om $|\lambda| < 1$. Alltså är egenvärdena λ innanför enhetscirkeln och motsvarande egenvektorer $\mathbf{x}_\lambda = (\lambda^i)_{i=0}^\infty$.
- (b) Enligt algebrans fundamentalsats kan ett komplext polynom kan faktoriseras i linjära faktorer $x - \lambda$. Produkten är injektiv om och endast om alla faktorer är injektiva. Enligt del (a) är en faktor $L - \lambda I$ injektiv om och endast om $|\lambda| \geq 1$. Därmed är dessa polynom precis de polynom som saknar nollställen innanför enhetscirkeln.

Svar.

- (a) Egenvärdena är $\lambda \in \mathbb{C}$ med $|\lambda| < 1$ och motsvarande egenvektor $\mathbf{x}_\lambda = (\lambda^i)_{i=0}^\infty$.
- (b) $p(L)$ är injektiv om och endast om $p(x)$ saknar nollställen innanför enhetscirkeln.

8. Låt V och W vara komplexa inre-produktrum och låt $L : V \longrightarrow W$ vara en linjär avbildning. Definiera en seskvilinjär form på $U = V \oplus W$ som

$$\left\langle \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{y}_1 \end{bmatrix} \middle| \begin{bmatrix} \mathbf{x}_2 \\ \mathbf{y}_2 \end{bmatrix} \right\rangle = \langle \mathbf{x}_1 | \mathbf{x}_2 \rangle + \langle L(\mathbf{x}_1) | \mathbf{y}_2 \rangle + \langle \mathbf{y}_1 | L(\mathbf{x}_2) \rangle + \langle \mathbf{y}_1 | \mathbf{y}_2 \rangle$$

där den första termen beräknas med inre produkten på V och de tre övriga med inre produkten på W . Visa att detta definierar en inre produkt om och endast om $|L(\mathbf{x})| < |\mathbf{x}|$ för alla $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ i V . (4 p)

Lösningsförslag. Det är klart att uttrycket är seskvilinjärt eftersom varje term är seskvilinjär och L är linjär.¹ Det är också konjugatsymmetriskt eftersom inre produkterna är det och de två mittersta termerna byter plats eftersom

$$\overline{\langle L(\mathbf{x}_1) | \mathbf{y}_2 \rangle} = \langle \mathbf{y}_2 | L(\mathbf{x}_1) \rangle \quad \text{och} \quad \overline{\langle \mathbf{y}_2 | L(\mathbf{x}_2) \rangle} = \langle L(\mathbf{x}_1) | \mathbf{y}_2 \rangle.$$

Det återstår att avgöra när produkten blir positivt definit.

$$\left\langle \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{y} \end{bmatrix} \middle| \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{y} \end{bmatrix} \right\rangle = \langle \mathbf{x} | \mathbf{x} \rangle + \langle L(\mathbf{x}) | \mathbf{y} \rangle + \langle \mathbf{y} | L(\mathbf{x}) \rangle + \langle \mathbf{y} | \mathbf{y} \rangle = |\mathbf{x}|^2 + |\mathbf{y}|^2 + 2 \operatorname{Re}(\langle L(\mathbf{x}) | \mathbf{y} \rangle)$$

Enligt Cauchy-Schwarz olikhet är

$$|\mathbf{x}|^2 + |\mathbf{y}|^2 + 2 \operatorname{Re}(\langle L(\mathbf{x}) | \mathbf{y} \rangle) \geq |\mathbf{x}|^2 + |\mathbf{y}|^2 - 2|L(\mathbf{x})| \cdot |\mathbf{y}| = (|\mathbf{x}| - |\mathbf{y}|)^2 + 2(|\mathbf{x}| - |L(\mathbf{x})|)|\mathbf{y}|$$

Detta är positivt om $|L(\mathbf{x})| < |\mathbf{x}|$ och inte $|\mathbf{x}| = |\mathbf{y}| = 0$, vilket visar att formen är positivt definit.

Om $\mathbf{y} = -L(\mathbf{x})$ och $|L(\mathbf{x})| \geq |\mathbf{x}|$ för något $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ får vi

$$\langle \mathbf{x} | \mathbf{x} \rangle + \langle L(\mathbf{x}) | \mathbf{y} \rangle + \langle \mathbf{y} | L(\mathbf{x}) \rangle + \langle \mathbf{y} | \mathbf{y} \rangle = |\mathbf{x}|^2 - |L(\mathbf{x})|^2 \leq 0,$$

vilket visar att formen inte är positivt definit.

¹Behöver inte visas eftersom det står i uppgiften

9. Avgör för vilka par av komplexa matriser A och B av rang 1 som Moore–Penroseinversen uppfyller att $(AB)^+ = B^+A^+$. Observera att matriserna inte behöver vara kvadratiska, men produkten AB behöver vara definierad. **(4 p)**

Lösningsförslag. Vi kan skriva $A = \sigma \mathbf{y} \mathbf{x}_1^\dagger$ och $B = \mu \mathbf{x}_2 \mathbf{z}^\dagger$, där $|\mathbf{y}| = |\mathbf{x}_1| = |\mathbf{x}_2| = |\mathbf{z}| = 1$, $\sigma \neq 0$ och $\mu \neq 0$. Detta ger

$$A^+ = \frac{1}{\sigma} \mathbf{x}_1 \mathbf{y}^\dagger \quad \text{och} \quad B^+ = \frac{1}{\mu} \mathbf{z} \mathbf{x}_2^\dagger$$

Vi får därmed att

$$AB = \sigma \mu \mathbf{y} \mathbf{x}_1^\dagger \mathbf{x}_2 \mathbf{z}^\dagger = \sigma \mu \langle \mathbf{x}_1 | \mathbf{x}_2 \rangle \mathbf{y} \mathbf{z}^\dagger$$

och

$$B^+A^+ = \frac{1}{\sigma \mu} \mathbf{z} \mathbf{x}_2^\dagger \mathbf{x}_1 \mathbf{y}^\dagger = \frac{1}{\sigma \mu} \langle \mathbf{x}_2 | \mathbf{x}_1 \rangle \mathbf{z} \mathbf{y}^\dagger.$$

Om $AB = 0$ är $(AB)^+ = 0$ och vi måste ha $\langle \mathbf{x}_1 | \mathbf{x}_2 \rangle = 0$. Annars har AB rang 1 och

$$(B^+A^+)AB(B^+A^+) = \frac{1}{\sigma \mu} \langle \mathbf{x}_2 | \mathbf{x}_1 \rangle^2 \langle \mathbf{x}_1 | \mathbf{x}_2 \rangle \mathbf{z} \mathbf{y}^\dagger \mathbf{y} \mathbf{z}^\dagger \mathbf{z} \mathbf{y}^\dagger = |\langle \mathbf{x}_1 | \mathbf{x}_2 \rangle|^2 B^+A^+$$

För att $(AB)^+ = B^+A^+$ måste därmed $|\langle \mathbf{x}_1 | \mathbf{x}_2 \rangle| = 1$, vilket enligt Cauchy-Schwarz olikhet gäller precis om $\mathbf{x}_1$ och $\mathbf{x}_2$ är parallella.

Sammantaget har vi att $(AB)^+ = B^+A^+$ gäller om $\mathbf{x}_1$ och $\mathbf{x}_2$ antingen är ortogonala eller parallella. Vi kan formulera det som att $\text{im}(B)$ ska ligga i eller vara ortogonal mot $\ker(A)$.

Svar. $(AB)^+ = B^+A^+$ gäller för matriser av rang 1 om och endast om $\text{im}(B) \subseteq \ker(A)$ eller $\text{im}(B) \perp \ker(A)$.