



SF1681 Linjär algebra, fk
Tentamen
12 januari 2022

Skrivtid: 14:00–19:00

Tillåtna hjälpmedel: inga

Examinator: David Rydh

Tentamen består av nio uppgifter som vardera ger maximalt fyra poäng. Del I utgörs av de tre första uppgifterna som testar förmågan att lösa grundläggande problem. Del II utgörs av de två följande uppgifterna och testar begreppsförståelse och kunskap om satser och samband. De fyra sista uppgifterna utgör del III och testar förmågan att lösa mer avancerade problem och är avsedda främst för högre betyg. Bonuspoäng av typ I adderas till erhållna poäng på del I och bonuspoäng av typ II adderas till erhållna poäng på del II. Det går dock inte att få mer än 12 respektive 8 poäng på dessa delar. Betygsgränserna vid tentamen kommer preliminärt att ges av följande tabell där kolumnerna anger poänggräns för respektive del/hela skrivningen.

Del	Poäng	Innehåll	Fx	E	D	C	B	A
I	12	Grundläggande problem	-	-	-	-	-	-
II	8	Begrepp och satser	4	4	4	6	6	6
III	16	Avancerade problem	-	-	-	-	-	-
hela	36		11	12	18	22	26	30

Till exempel krävs för betyg C minst 22 poäng totalt varav 6 poäng på del II.

För full poäng på en uppgift krävs att lösningen är väl presenterad och lätt att följa. Det innebär speciellt att införda beteckningar ska definieras, att den logiska strukturen tydligt beskrivs i ord eller symboler och att resonemangen är väl motiverade och tydligt förklarade. Lösningar som allvarligt brister i dessa avseenden bedöms med högst två poäng.

DEL I – GRUNDLÄGGANDE PROBLEM

1. Låt $\ell^2(\mathbb{C})$ vara Hilbertrummet av följder $\mathbf{a} = (a_0, a_1, \dots)$ med $|\mathbf{a}|^2 = \sum_{i=0}^{\infty} |a_i|^2 < \infty$ och den inre produkten $\langle \mathbf{a} | \mathbf{b} \rangle = \sum_{i=0}^{\infty} \overline{a_i} b_i$. Låt $c \in \mathbb{C}$ vara ett komplext tal med $|c| \leq 1$ och låt $L_c: \ell^2(\mathbb{C}) \rightarrow \ell^2(\mathbb{C})$ vara operatoren som tar följden $\mathbf{a} = (a_0, a_1, \dots)$ på följden $L_c(\mathbf{a}) = (a_0, ca_1, c^2a_2, c^3a_3, \dots)$.

(a) Bestäm den adjungerade operatoren $L_c^\dagger$. (2 p)

(b) För vilka $c \in \mathbb{C}$ är L_c självadjungerad och/eller unitär? (2 p)

2. Låt $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 4 & 4 \end{bmatrix}$. Bestäm Jordans normalform till A och beräkna A^{2022} . (4 p)

3. Låt $K = \{a + b\sqrt{2} : a, b \in \mathbb{Q}\} \subset \mathbb{R}$. Detta är en kropp.

(a) Avgör om matrisen $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$ är diagonaliserbar över kroppen K . (2 p)

(b) Bestäm en 2×2 -matris $B \in M_2(\mathbb{Q})$ och en isomorfi av kroppar $\varphi: K \rightarrow \text{Span}\{I, B\}$, dvs en isomorfi av $\mathbb{Q}$ -vektorum som tar multiplikation i K till multiplikation av matriser. (2 p)

DEL II – BEGREPP OCH SATSER

4. Låt V vara ett vektorrum och $L: V \rightarrow V$ en operator.
- (a) Definiera vad som menas med minimalpolynomet $q_L(t)$ för L . **(1 p)**
 - (b) Visa att minimalpolynomet existerar om $\dim V = n < \infty$ och har grad $\leq n^2$. **(1 p)**
 - (c) Ge ett exempel på en operator L på ett ändligtdimensionellt vektorrum V sådan att minimalpolynomet $q_L(t)$ inte är lika med det karakteristiska polynomet $p_L(t)$. **(1 p)**
 - (d) Ge ett exempel på en operator L sådan att $q_L(t)$ inte existerar. **(1 p)**
5. (a) Vad innebär det att en $n \times n$ -matris A är unitär? **(1 p)**
- (b) Vad innebär en *singulärvärdesuppdelning* (en: *singular value decomposition*) av en linjär avbildning $L: V \rightarrow W$ mellan ändligtdimensionella inre produktrum V och W ? Definiera även begreppen *singulärvärde* och *singulärvektor*. **(1 p)**
- (c) Visa att en $n \times n$ -matris A är unitär om och endast om A har n stycken singulärvärden som alla är 1. **(2 p)**

DEL III – AVANCERADE PROBLEM

6. En följd av polynom $p_0(t), p_1(t), \dots$ definieras rekursivt av
- $$p_0(t) = 4t - 1, \quad p_1(t) = 4t^2 + 1, \quad \text{och} \quad p_{n+1}(t) = 2p_n(t) + 3p_{n-1}(t) \text{ för } n \geq 1.$$
- Bestäm en explicit formel för $p_n(t)$. **(4 p)**
7. Låt V vara ett komplext vektorrum och definiera en avbildning $f: V \times V \rightarrow V \otimes V$ genom $f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{x} \otimes \mathbf{y} - \mathbf{y} \otimes \mathbf{x}$. Visa att det finns en unik operator L på $V \otimes V$ sådan att $L(\mathbf{x} \otimes \mathbf{y}) = f(\mathbf{x}, \mathbf{y})$. Visa att $V \otimes V = \text{im } L \oplus \ker L$ är en inre direkt summa. **(4 p)**
8. Låt $A \in M_n(\mathbb{C})$ vara en $n \times n$ -matris och låt $L: \mathbb{C}[x] \rightarrow M_n(\mathbb{C})$ vara den linjära avbildningen som definieras av $L(p(x)) = p(A) + p'(A)$.
- (a) Bestäm de möjliga dimensionerna för bildrummet till L när A varierar men n är fixt. **(2 p)**
 - (b) Bestäm ett delrum $V \subset \mathbb{C}[x]$ sådant att $\mathbb{C}[x] = V \oplus \ker(L)$ när $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$. **(2 p)**
9. Låt V vara ett ändligtdimensionellt komplext inre produktrum. Låt $V_1, V_2, \dots, V_m$ vara en-dimensionella delrum, för något $m \geq 1$, och låt $L_i: V \rightarrow V$ vara operatorn som projicerar ortogonalt på V_i för $i = 1, 2, \dots, m$. Låt $L = L_1 + L_2 + \dots + L_m$.
- (a) Visa att L är diagonaliserbar med högst m noll-skilda egenvärden. **(2 p)**
 - (b) Visa att egenvärdena är reella och icke-negativa och att det största egenvärdet ligger i intervallet $[1, m]$. **(2 p)**