



**Lösningsförslag till tentamen
Tisdagen den 14 januari 2020**

DEL I – GRUNDLÄGGANDE PROBLEM

1. (a) Ange definitionen av att en funktion $f(x)$ är kontinuerlig vid en punkt $x = a$. (1 p)

(b) För vilka reella tal a och b är funktionen

$$g(x) = \begin{cases} \frac{\sin(ax)}{x} & x < 0, \\ b & x = 0, \\ e^{e^{-1/x}} & x > 0 \end{cases}$$

kontinuerlig på $\mathbb{R}$?

(3 p)

Lösningsförslag.

- (a) Låt $f : D_f \rightarrow \mathbb{R}$ vara en funktion sådan att varje punkterad omgivning till a innehåller punkter i D_f och $a \in D_f$. Att funktionen $f(x)$ är kontinuerlig vid punkten $x = a$ betyder att $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$. Med andra ord finns för varje $\varepsilon > 0$ ett $\delta > 0$ så att $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$ för alla $x \in D_f$ med $|x - a| < \delta$.
- (b) Enligt standardgränsvärdet för $\sin(x)/x$ när $x \rightarrow 0$ har vi att för $a \neq 0$ är

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(ax)}{x} = a \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin ax}{ax} = a \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = a \cdot 1 = a.$$

Vidare har vi att $\lim_{x \rightarrow 0+} e^{-1/x} = 0$ eftersom $e^t \rightarrow 0$ då $t \rightarrow -\infty$. Eftersom e^x är kontinuerlig är

$$\lim_{x \rightarrow 0+} e^{e^{-1/x}} = e^0 = 1.$$

Om $g(x)$ ska vara kontinuerlig vid $x = 0$ krävs att $b = \lim_{x \rightarrow 0+} e^{e^{-1/x}} = 1$ och att $b = \lim_{x \rightarrow 0-} \frac{\sin(ax)}{x} = a$. Alltså har vi $a = b = 1$. Till sist, både $\sin(ax)/x$ och $e^{e^{-1/x}}$ är kontinuerliga för $\neq 0$ eftersom de är ett kvot och respektive en sammansättning av kontinuerliga funktioner. Då blir $g(x)$ kontinuerlig på hela $\mathbb{R}$ om $a = b = 1$. □

Svar.

- (b) $a = b = 1$ är enda möjligheten för att $g(x)$ ska bli kontinuerlig på hela $\mathbb{R}$.

2. (a) Formulera Taylors formel kring 0. (1 p)
(b) Använd Taylors formel för att visa att

$$\left| e^x - \sin(x) - 1 - \frac{x^2}{2} \right| \leq \frac{e+1}{3!} |x|^3 \quad \text{där } |x| < 1.$$

(3 p)

Lösningsförslag.

- (a) Taylors formel säger att om $f(x)$ är n gånger kontinuerligt deriverbar i intervallet $[-a, a]$ så gäller att det för alla $x \in [-a, a]$ finns ett ξ mellan 0 och x så att

$$f(x) = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{f^{(k)}(0)x^k}{k!} + \frac{f^{(n)}(\xi)x^n}{n!}.$$

- (b) Låt $f(x) = e^x - \sin(x) - 1 - \frac{x^2}{2}$. Vi beräknar Taylorpolynomet av grad 2 till detta och får

$$f'(x) = e^x - \cos(x) - x, \quad f''(x) = e^x + \sin(x) - 1 \quad \text{och} \quad f^{(3)}(x) = e^x - \cos(x)$$

vilket ger $f(0) = f'(0) = f''(0) = 0$ och Taylorpolynomet 0 kring $x = 0$. Alltså har vi enligt Taylors formel att

$$f(x) = \frac{(e^\xi - \cos(\xi))x^3}{3!}$$

för $x \in [-1, 1]$ där ξ ligger mellan 0 och x . Eftersom e^x är växande och $|\cos(x)| \leq 1$ får vi

$$|f(x)| \leq (e+1) \frac{|x|^3}{3!}$$

vilket skulle visas.

□

3. Beräkna största och minsta värdet av funktionen $g(x) = (x^2 + 2x)^3$ för $x \in [-2, 1]$.

(4 p)

Lösningsförslag. Observera att g är deriverbar på intervallet $(-2, 1)$. Detta ger oss att en max- eller minpunkt kan bara vara i en stationär punkt, dvs där derivatan är noll, eller i någon av ändpunkterna. Derivatan ges av $g'(x) = 3(x^2 + 2x)^2(2x + 2) = 6x^2(x + 2)^2(x + 1)$ som har nollställena i $x = -2$, $x = -1$ och $x = 0$. Värdet för funktionen i dessa punkter och i ändpunkterna ges av

$$g(-2) = 0, \quad g(-1) = (-1)^3 = -1, \quad g(0) = 0 \quad \text{och} \quad g(1) = 3^3 = 27.$$

Därmed ges det största värdet av $g(1) = 27$ och det minsta av $g(-1) = -1$. $\square$

Svar. Det största värdet är $g(1) = 27$ och det minsta värdet är $g(-1) = -1$.

4. (a) Bestäm en primitiv funktion till funktionen $f(x) = \frac{1}{x(1+x)}$. (2 p)
- (b) Beräkna volymen av den rotationskropp, som genereras då området mellan kurvan $y = \sin x$, och x -axeln där $x \in [0, \pi]$ roteras kring y -axeln. (2 p)

Lösningsförslag.

- (a) Vi använder partialbråksuppdelning och söker a och b så att

$$f(x) = \frac{1}{x(1+x)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{1+x} = \frac{a(1+x) + bx}{x(1+x)}.$$

Därmed ska $a + b = 0$ och $a = 1$, vilket ger $b = -1$. Vi kan nu använda att derivatan av $\ln(x)$ är $1/x$ till att beräkna en primitiv funktion som

$$F(x) = \ln(x) - \ln(1+x)$$

Denna är bara definierad för intervallet $x > 0$. För att få en primitiv funktion som är definierad för alla $x \neq -1, 0$ kan vi ta beloppet och får att

$$F(x) = \ln|x| - \ln|1+x| = \ln \frac{|x|}{|1+x|}$$

är en primitiv funktion till $f(x)$ för alla $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 0\}$.

- (b) Volymen av rotationskroppen kring y -axeln ges av att lägga ihop volymerna av cylindriska skal. Detta ger

$$\int_0^\pi 2\pi x \sin(x) dx = 2\pi [-x \cos(x)]_0^\pi + 2\pi \int_0^\pi \cos(x) dx = 2\pi \cdot \pi + [\sin(x)]_0^\pi = 2\pi^2.$$

□

Svar.

- (a) $F(x) = \ln|x| - \ln|1+x|$ är en primitiv funktion.
- (b) Volymen av rotationskroppen är $2\pi^2$.

5. (a) För vilka reella tal p, q är den generaliserade integralen

$$\int_2^\infty \frac{x^2 + 1}{(x-2)^p x^q} dx$$

konvergent?

(2 p)

- (b) För vilka reella tal r är serien

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k^2 + 1)^r}$$

konvergent?

(2 p)

Lösningsförslag.

- (a) Vi delar upp den generaliserade integralen i två delar

$$\int_2^\infty \frac{x^2 + 1}{(x-2)^p x^q} dx = \int_2^3 \frac{x^2 + 1}{(x-2)^p x^q} dx + \int_3^\infty \frac{x^2 + 1}{(x-2)^p x^q} dx$$

För den första delen kan vi nu förskjuta med 2 och få

$$\int_0^1 ((x+2)^2 + 1)(2+x)^{-q} x^{-p} dx$$

och vi kan jämföra med $\int_0^1 x^{-p} dx$. Vi har

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{((x+2)^2 + 1)(2+x)^{-q} x^{-p}}{x^{-p}} = \lim_{x \rightarrow 0} ((x+2)^2 + 1)(2+x)^{-q} = \frac{5}{2^q} \neq 0,$$

vilket ger, enligt en jämförelse sats, att $\int_0^1 ((x+2)^2 + 1)(2+x)^{-q} x^{-p} dx$ konvergerar om och endast om $\int_0^1 x^{-p} dx$ konvergerar vilket händer om och endast om $p < 1$.

För den andra delen jämföra vi med $\int_3^\infty x^{2-p-q} dx$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{x^2+1}{(x-2)^p x^q}}{x^{2-p-q}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{1}{x^2}}{(1 - \frac{2}{x})^p} = 1 \neq 0.$$

En jämförelse sats säger att den ursprungliga integralen konvergerar om och endast om $\int_3^\infty x^{2-p-q} dx$, och vi kan använda att $\int_1^\infty x^{2-p-q} dx$ är konvergent om och endast om $2 - p - q < -1$. Sammantaget ger det $p < 1$ och $p + q > 3$.

- (b) Vi kan jämföra med serien $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{2r}}$ vilket enligt en sats konvergerar om och endast om $2r > 1$. Observera att

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{(k^2+1)^r}}{\frac{1}{k^{2r}}} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{(1 + \frac{1}{k^2})^r} = 1 \neq 0.$$

Detta ger oss enligt en jämförelse sats att $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k^2+1)^r}$ konvergerar om och endast om $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{2r}}$ konvergerar, vilket händer om och endast om $r > 1/2$.

□

Svar.

- (a) Integralen är konvergent om och endast om $p < 1$ och $p + q > 3$.
 (b) Serien är konvergent om och endast om $r > 1/2$.

DEL II – AVANCERADE PROBLEM

6. (a) Låt $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ vara en funktion. Ange definitionen av att $f(x)$ konvergerar mot L då x går mot a . (1 p)
- (b) Visa med hjälp av definitionen att $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \frac{1}{5}$ om $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$. (3 p)

Lösningsförslag.

- (a) För varje $\varepsilon > 0$ finns ett $\delta > 0$ så att $|f(x) - L| < \varepsilon$ för alla x med $0 < |x - a| < \delta$.
- (b) Vi har att

$$\frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{5} = \frac{4-x^2}{5(1+x^2)} = \frac{2+x}{5(1+x^2)}(2-x).$$

För $x \in [1, 3]$ har vi att

$$\left| \frac{2+x}{5(1+x^2)} \right| \leq \frac{5}{5 \cdot (1+1)} = \frac{1}{2}$$

Alltså kan vi välja $\delta = \min\{2\varepsilon, 1\}$ vilket ger

$$\left| f(x) - \frac{1}{5} \right| \leq \frac{1}{2}|x-2| < \varepsilon$$

för alla x med $|x-2| < \delta$.

□

7. (a) Formulera *Analysens huvudsats* (inte *Insättningsformeln*) och bevisa den med hjälp av medelvärdessatsen för integraler och definitionen av derivata. (2 p)
- (b) Låt

$$f(t) = \begin{cases} 1 & t = 0 \\ \frac{\sin(t)}{t} & t > 0 \end{cases}$$

och definiera funktionen $Si(x) = \int_0^x f(t) dt$. Beräkna alla lokala maxpunkter till $Si(x)$ för $x \in [0, \infty)$. (2 p)

Lösningsförslag.

- (a) Huvudsatsen säger att om f är en kontinuerlig funktion på intervallet $[a, b]$ så är funktionen F som ges av

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt$$

en primitiv funktion till f i intervallet $[a, b]$.

Vi behöver visa att $F'(x) = f(x)$ för alla x i intervallet $[a, b]$. Enligt definitionen av derivata har vi

$$F'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t) dt$$

Enligt medelvärdessatsen finns för varje h med $x+h$ i intervallet $[a, b]$ ett tal ξ_h mellan x och $x+h$ så att

$$\frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t) dt = f(\xi_h)$$

Vi har att $\lim_{h \rightarrow 0} \xi_h = x$ och eftersom f är kontinuerlig kommer $\lim_{h \rightarrow 0} f(\xi_h) = f(x)$, vilket visar att $F(x)$ är deriverbar med derivata $F'(x) = f(x)$ för alla x i intervallet $[a, b]$.

- (b) Eftersom f är kontinuerlig i intervallet $[0, \infty]$ kommer Si enligt analysens huvudsats vara deriverbar med derivata f och därmed måste alla lokala maxima för Si vara i stationära punkter, dvs i nollställena för f . Dessa är alla positiva multipler av π eftersom $f(0) = 1 \neq 0$ och $\sin(t) = 0$ om och endast om $t = \pi n$ för ett heltal n . För att se vilka av de stationära punkterna som är maxima kan vi se på derivatans tecken (d.v.s. $f(x)$) på båda sidor av de stationära punkterna. $\sin(x)$ går från positiva till negativa värden vid $t = \pi n$ om n är udda och från negativ till positiv där n är jämnt. Därmed är det ett maximum när n är udda och ett minimum när n är jämnt. Lokala maxima blir därmed $x = (2n+1)\pi$, för $n \geq 0$.

□

Svar.

- (b) Lokala maxima för Si ges av $x = (2n+1)\pi$, för $n \geq 0$.

8. Låt $f : [1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ vara en kontinuerlig funktion sådan att

$$\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} \leq f(x) \leq \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} \quad \text{för alla } x \in [1, \infty),$$

och låt $F : [1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ definieras som

$$F(x) = \int_1^x f(t) dt.$$

Beräkna gränsvärdet

$$\lim_{x \rightarrow \infty} F(3x) - F(x)$$

om det konvergerar för varje sådan funktion f eller visa att det är divergent för något f .

(4 p)

Lösningsförslag. Vi kan skriva $f(x) = 1/x + g(x)$ där g är kontinuerlig och uppfyller $|g(x)| \leq 1/x^2$, för $x > 1$.

Vi har att $F(x) = \ln(x) + \int_1^x g(x) dx$ och

$$F(3x) - F(x) = \ln(3x) - \ln(x) + \int_x^{3x} g(x) dx = \ln(3) + \int_x^{3x} g(x) dx$$

för $x \geq 1$. På grund av olikheten för $g(x)$ har vi att

$$\left| \int_x^{3x} g(x) dx \right| \leq 2x \cdot \frac{1}{x^2} = \frac{2}{x}$$

och eftersom $\lim_{x \rightarrow \infty} 2/x = 0$ får vi att gränsvärdet existerar och är lika med $\ln(3)$ för alla sådana funktioner f . $\square$

Svar. $\lim_{x \rightarrow \infty} F(3x) - F(x) = \ln(3)$ för alla sådana funktioner f .