

TENTAMEN I VEKTORANALYS
SI1146 Vektoranalys, HT2021

Fredagen den 22 oktober 2021, kl 14.00 – 19.00

Anteckna på varje blad: Namn, utbildningslinje, årskurs och problemnummer.
Tillåtna hjälpmedel: Formelblad som delas ut (ingen räknedosa).

Examinator: Edwin Langmann (Epost: langmann@kth.se)

Bonuspoäng: Poängen från kontrollskrivning HT2021 adderas till tentauppgift 1, dock max 6 poäng totalt.

Lösningar: Kommer att finnas på kurshemsidan.

Poäng: Varje uppgift kan ge 6 poäng.

Motivera utförligt! Otillräckliga motiveringar kan medföra poängavdrag.

Notation: (i) (x, y, z) är kartesiska koordinater, och $\mathbf{r} = x\mathbf{e}_x + y\mathbf{e}_y + z\mathbf{e}_z$ är Ortsvektorn, (ii) (ρ, φ, z) är cylinderkoordinater så att $x = \rho \cos(\varphi)$, $y = \rho \sin(\varphi)$, (iii) (r, θ, φ) är sfäriska koordinater så att $x = r \sin(\theta) \cos(\varphi)$, $y = r \sin(\theta) \sin(\varphi)$, $z = r \cos(\theta)$.

1. (a) Ett vektorfält ges i sfäriska koordinater: $\mathbf{v} = r^3 \sin(\theta) \mathbf{e}_\theta$. Beräkna $\text{div}(\mathbf{v})$ och $\text{rot}(\mathbf{v})$! (3p)
(b) Vektorfältet $\mathbf{A} = 3r^2 \cos(\theta) \mathbf{e}_r - r^2 \sin(\theta) \mathbf{e}_\theta$ (i sfäriska koordinater) har en skalärpotential U . Beräkna potentialen U som uppfyller $U = 0$ när $r = 0$. (3p)
2. Låt $\mathbf{u}$ vara ett deriverbart vektorfält.
(a) Beräkna $\nabla \cdot (\mathbf{r} \times \mathbf{u})$ om $\nabla \times \mathbf{u} = \mathbf{r}$ (OBS att notationen förklaras i början av tentamen!). (2p)
(b) Visa att
$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{u}) = c_1 \nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}) + c_2 \Delta \mathbf{u}$$
med vissa konstanter c_1 och c_2 som du skall bestämma. (2p)
(c) Visa att
$$(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = c_3 \nabla(u^2) + c_4 \mathbf{u} \times (\nabla \times \mathbf{u})$$
med vissa konstanter c_3 och c_4 som du skall bestämma. (2p)
3. (a) För vilka värden av n uppfyller $u = \rho^n \cos(2\varphi)$ (i cylinderkoordinater) Laplaces ekvation $\Delta u = 0$? (3p)
(b) Beräkna flödet av vektorfältet

$$\mathbf{A} = \left(r + \frac{R^3}{r^2} \right) \mathbf{e}_r$$

(i sfäriska koordinater) ur cylindern $0 \leq x^2 + y^2 \leq R^2$, $-R \leq z \leq R$; $R > 0$ är en konstant. *Ledning:* $\nabla \cdot \mathbf{A} = 3$ i området $r > 0$. (3p)

4. Ett koordinatsystem (u, v, w) definieras genom

$$x = u, \quad y = vw, \quad z = \frac{1}{2}(v^2 - w^2).$$

(a) Visa att koordinaterna (u, v, w) är ortogonala, och beräkna skalfaktorerna h_u, h_v, h_w ! (2p)

(b) Transformera vektorfältet $\mathbf{A} = x\mathbf{e}_x + 2z\mathbf{e}_z$ till koordinaterna (u, v, w) . (2p)

(c) Transformera Laplaces ekvation $\Delta\Phi = 0$ till koordinaterna (u, v, w) . (2p)

5. (OBS att man kan lösa (b) innan (a)!)

(a) Låt V vara en delvolym av $\mathbb{R}^3$, S randytan till V , och $\mathbf{u}$ ett vektorfält som är virvelfritt och har källtätheten ρ : $\text{rot}(\mathbf{u}) = \mathbf{0}$ och $\text{div}(\mathbf{u}) = \rho$.

Visa att

$$\int_V \rho u_i dV = \oint_S T_{ij} dS_j$$

där

$$T_{ij} = k_1 \mathbf{u}^2 \delta_{ij} + k_2 u_i u_j$$

med vissa konstanter k_1 och k_2 som du skall bestämma; $u_i = \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{u}$ med $\mathbf{e}_i$ enhetsvektorerna i ett kartesisk koordinatsystem K ($i, j = 1, 2, 3$). (4p)

(b) Anta att komponenterna av tensorn T_{ij} i en viss punkt och i ett givet kartesisk koordinatsystem K är

$$T_{11} = C, \quad T_{22} = 2C, \quad T_{33} = 3C, \quad T_{ij} = 0 \text{ om } i \neq j,$$

där C är en konstant ($i, j = 1, 2, 3$). Beräkna komponenten T'_{13} (dvs., T'_{ij} för $i = 1$, $j = 3$ och i samma punkt) i kartesiska koordinatsystemet K' som är roterad med vinkeln α moturs omkring den gemensamma $\mathbf{e}_2$ -axeln. (2p)

6. Du skall beräkna stationära temperaturfördelningen $T = T(\mathbf{r})$ inom ett klot $0 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2$ enligt följande beskrivning ($R > 0$ är en konstant).

(i) Värmen inom klotet diffunderar enligt Fouriers lag, dvs., det finns en värmeström $\mathbf{j}$ som, i varje punkt $\mathbf{r}$ inom klotet, är parallel med rikningen i vilken temperaturen minskar snabbast och som har ett belopp proportionell mot temperaturändringen i denna rikning. (ii) Klotet består av radioaktiv material som värmer upp klotet med en konstant värmekälltäthet jämnt fördelad över klotet, dvs., flödet av värmevärmeströmmen $\mathbf{j}$ ut ur en godtycklig volym V inom klotet är lika med $k|V|$, där $|V| = \int_V dV$ och k är proportionalitetskonstanten. (iii) Temperaturen är konstant och lika med $T_0 > 0$ vid klotets rand $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$.

Översätt beskrivningen ovan i matematiska ekvationer, dvs., härled en matematisk modell för temperaturen $T = T(\mathbf{r})$. Använd ett symmetriargument som förenklar modellen till en ordinarie differentialekvation med randvillkor. Lös modellen! *Ledning*: OBS att temperaturen i klotets centrum är ändlig. (6p)

LYCKA TILL!

Lösningföreläsning tentamen SI1147, 22 oktober 2021

NOTE: I typed this in quickly and did not check: this will probably be corrected!!!!

1. (a) $u_r = u_\varphi = 0$ och $u_\theta = r^3 \sin(\theta)$ ger

$$\boxed{\operatorname{div}(\mathbf{u})} = \frac{1}{r^2 \sin(\theta)} \partial_\theta \underbrace{(r \sin \theta \cdot r^3 \sin(\theta))}_{r^4 \sin^2(\theta)} = \frac{1}{r^2 \sin(\theta)} r^4 2 \sin(\theta) \cos(\theta) = \boxed{2r^2 \cos(\theta)}.$$

och

$$\begin{aligned} \boxed{\operatorname{rot}(\mathbf{u})} &= \frac{1}{r^2 \sin(\theta)} \begin{vmatrix} \mathbf{e}_r & r\mathbf{e}_\theta & r \sin(\theta)\mathbf{e}_\varphi \\ \partial_r & \partial_\theta & \partial_\varphi \\ 0 & \underbrace{r \cdot r^3 \sin(\theta)}_{r^4 \sin(\theta)} & 0 \end{vmatrix} \\ &= \underbrace{\frac{1}{r^2 \sin(\theta)} r \sin(\theta) \mathbf{e}_\varphi}_{\frac{1}{r} \mathbf{e}_\varphi} \underbrace{\partial_r(r^4 \sin(\theta))}_{4r^3 \sin(\theta)} = \boxed{4r^2 \sin(\theta) \mathbf{e}_\varphi}. \end{aligned}$$

- (b) Ansatsen

$$\mathbf{A} = 3r^2 \cos(\theta) \mathbf{e}_r - r^2 \sin(\theta) \mathbf{e}_\theta \stackrel{!}{=} \nabla U = \mathbf{e}_r \partial_r U + \mathbf{e}_\theta \frac{1}{r} \partial_\theta U + \mathbf{e}_\varphi \frac{1}{r \sin(\theta)} \partial_\varphi U$$

(notationen $\stackrel{!}{=}$ betyder att jag kräver att det skall vara lika) ger

$$\partial_r U \stackrel{!}{=} 3r^2 \cos(\theta) \Rightarrow U = r^3 \cos(\theta) + f(\theta, \varphi)$$

med en "integrationskonstant" f som kan beror på θ och φ (men inte på r),

$$\frac{1}{r} \partial_\theta U = -r^2 \sin(\theta) + \frac{1}{r} \partial_\theta f \stackrel{!}{=} -r^2 \sin(\theta) \Rightarrow \partial_\theta f = 0 \Rightarrow U = r^3 \cos(\theta) + g(\varphi),$$

$$\frac{1}{r \sin(\theta)} \partial_\varphi U = \frac{1}{r \sin(\theta)} \partial_\varphi g(\varphi) \stackrel{!}{=} 0 \Rightarrow g(\varphi) = c$$

med en godtycklig konstant c . Detta ger $U = r^3 \cos(\theta) + c$. $U = 0$ för $r = 0$ ger $c = 0$. Svar: $\boxed{U = r^3 \cos(\theta)}$.

2. (a)

$$\boxed{\nabla \cdot (\mathbf{r} \times \mathbf{u})} = \partial_i (\epsilon_{ijk} x_j u_k) = \epsilon_{ijk} (\delta_{ij} u_k + x_j \partial_i u_k) = \underbrace{\epsilon_{iik}}_0 u_k - x_j \underbrace{\epsilon_{jik} \partial_j u_k}_{[\nabla \times \mathbf{u}]_j = x_j} = \boxed{-\mathbf{r}^2}.$$

(b) (Viktig standardproblem som gjordes under kursens gång — jag ger därför bara svaret)

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{u}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}) - \nabla^2 \mathbf{u} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}) - \Delta \mathbf{u},$$

dvs., $\boxed{c_1 = -c_2 = 1}$.

(c)

$$\begin{aligned} [(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}]_i &= u_j \partial_j u_i \stackrel{!}{=} [c_3 \nabla(\mathbf{u}^2) + c_4 \mathbf{u} \times (\nabla \times \mathbf{u})]_i = [c_3 \partial_i(u_j u_j) + c_4 \epsilon_{ijk} u_j \epsilon_{klm} \partial_l u_m] \\ &= 2c_3 u_j \partial_i u_j + c_4 (\delta_{il} \delta_{jm} - \delta_{im} \delta_{jl}) u_j \partial_l u_m \\ &= 2c_3 u_j \partial_i u_j + c_4 (u_j \partial_i u_j - u_j \partial_j u_i) = (2c_3 + c_4) u_j \partial_i u_j - c_4 u_j \partial_j u_i \end{aligned}$$

ger $1 = -c_4$ och $0 = 2c_3 + c_4$, dvs., $\boxed{c_3 = 1/2}$, $\boxed{c_4 = -1}$.

3. (a)

$$\Delta u = \partial_\rho^2 u + \frac{1}{\rho} \partial_\rho u + \frac{1}{\rho^2} \partial_\varphi^2 u$$

$$= n(n-1)\rho^{n-2} \cos(2\varphi) + n\rho^{n-2} \cos(2\phi) - \rho^{n-2} 4 \cos(2\varphi) = (n^2 - 4)\rho^{n-2} \cos(\varphi),$$

dvs., $\Delta u = 0$ om $\boxed{n = \pm 2}$.

(b) Vi kan inte använda Gauss sats direkt för området V därför att vektorfältet $\mathbf{A}$ är singulärt i origon $r = 0$.

Men vi kan använda Gauss sats för området $V \setminus V_\epsilon$ (dvs., cylindern utan V_ϵ) där V_ϵ är klotet $0 \leq r \leq \epsilon$ som omslutas av sfärytan $S_\epsilon : r = \epsilon$ på följande sätt:

$$\oint_{\partial V} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left(\oint_{\partial V} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} - \oint_{\partial V_\epsilon} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} + \oint_{\partial V_\epsilon} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} \right)$$

där ∂V är randytan till V med orienteringen utåt, och ∂V_ϵ är randytan till V_ϵ med orienteringen utåt.

Vi observerar att

$$\oint_{\partial V} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} - \oint_{\partial V_\epsilon} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = \oint_{\partial(V \setminus V_\epsilon)} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = \int_{V \setminus V_\epsilon} \nabla \cdot \mathbf{A} dV = 3 \int_{V \setminus V_\epsilon} dV = 3(|V| - |V_\epsilon|),$$

där $|V| = R^2 \pi 2R = 2\pi R^3$ är volymen av cylindern och $|V_\epsilon| = 4\pi \epsilon^3/3$ klotets volymen.

Flödet ur V_ϵ :

$$\begin{aligned} \oint_{\partial V_\epsilon} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} &= \int_0^{2\pi} \int_0^\pi (r + R^3/r^2) \mathbf{e}_r \cdot \underbrace{r^2 \sin \theta d\theta d\varphi \mathbf{e}_r}_{d\mathbf{S}} \bigg|_{r=\epsilon} \\ &= (\epsilon + R^3/\epsilon^2) \epsilon^2 \underbrace{\int_0^{2\pi} \int_0^\pi \sin \theta d\theta d\varphi}_{4\pi} = 4\pi(\epsilon^3 + R^3). \end{aligned}$$

Detta ger

$$\lim_{\epsilon \downarrow 0} \oint_{\partial V_\epsilon} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = 4\pi R^3$$

och

$$\boxed{\oint_{\partial V} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = 3|V| + 4\pi R^3 = 6\pi R^3 + 4\pi R^3 = 10\pi R^3}.$$

4. (a) Vi skriver

$$\mathbf{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ vw \\ (v^2 - w^2)/2 \end{pmatrix}$$

kort för $\mathbf{r} = x\mathbf{e}_x + y\mathbf{e}_y + z\mathbf{e}_z = u\mathbf{e}_x + vw\mathbf{e}_y + \frac{1}{2}(v^2 - w^2)\mathbf{e}_z$. Detta ger

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} = \begin{pmatrix} 0 \\ w \\ v \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial w} = \begin{pmatrix} 0 \\ v \\ -w \end{pmatrix}. \quad (1)$$

Bevis att koordinatsystemet är ortogonalt:

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} = 0, \quad \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial w} = 0, \quad \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial w} = vw - vw = 0. \quad \text{v.s.v.}$$

(v.s.v. betyder "vad skulle visas", dvs., det är en markering att man har visat det man skulle). Beräkning av skalfaktorerna:

$$h_u^2 = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} = 1, \quad h_v^2 = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} = w^2 + v^2, \quad h_w^2 = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial w} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial w} = v^2 + w^2.$$

Svar: $\boxed{h_u = 1}, \boxed{h_v + h_w = \sqrt{v^2 + w^2}}.$

(b) Vi behöver enhetsvektorer $\mathbf{e}_u = \frac{1}{h_u} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}$ osv.:

$$\mathbf{e}_u = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_v = \frac{1}{\sqrt{v^2 + w^2}} \begin{pmatrix} 0 \\ w \\ v \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_w = \frac{1}{\sqrt{v^2 + w^2}} \begin{pmatrix} 0 \\ v \\ -w \end{pmatrix}.$$

Detta ger

$$\mathbf{A} = x\mathbf{e}_x + 2z\mathbf{e}_z = \begin{pmatrix} u \\ 0 \\ v^2 - w^2 \end{pmatrix}$$

och

$$A_u = \mathbf{e}_u \cdot \mathbf{A} = u, \quad A_v = \mathbf{e}_v \cdot \mathbf{A} = \frac{v(v^2 - w^2)}{\sqrt{v^2 + w^2}}, \quad A_w = \mathbf{e}_w \cdot \mathbf{A} = \frac{-w(v^2 - w^2)}{\sqrt{v^2 + w^2}}.$$

Svar:

$$\boxed{\mathbf{A} = u\mathbf{e}_u + \frac{(v^2 - w^2)}{\sqrt{v^2 + w^2}}(v\mathbf{e}_v - w\mathbf{e}_w)}.$$

[Jag kollar min räkning:

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= u \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{(v^2 - w^2)}{\sqrt{v^2 + w^2}} \left(v \frac{1}{\sqrt{v^2 + w^2}} \begin{pmatrix} 0 \\ w \\ v \end{pmatrix} - w \frac{1}{\sqrt{v^2 + w^2}} \begin{pmatrix} 0 \\ v \\ -w \end{pmatrix} \right) \\ &= u \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{(v^2 - w^2)}{(v^2 + w^2)} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ v^2 + w^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ 0 \\ v^2 - w^2 \end{pmatrix}. \quad (\text{OK.}) \end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned}\Delta\Phi &= \frac{1}{h_u h_v h_w} \left(\partial_u \left(\frac{h_v h_w \partial_u \Phi}{h_u} \right) + \partial_v \left(\frac{h_w h_u \partial_v \Phi}{h_v} \right) + \partial_w \left(\frac{h_u h_v \partial_w \Phi}{h_w} \right) \right) \\ &= \frac{1}{v^2 + w^2} \left(\partial_u ((v^2 + w^2) \partial_u \Phi) + \partial_v^2 \Phi + \partial_w^2 \Phi \right) = \boxed{\partial_u^2 \Phi + \frac{1}{v^2 + w^2} (\partial_v^2 \Phi + \partial_w^2 \Phi) = 0.}\end{aligned}$$

5. (a) $\text{rot}(\mathbf{u}) = \nabla \times \mathbf{u} = 0$ är ekvivalent med $\partial_i u_j = \partial_j u_i$; $\text{div}(\mathbf{u}) = \nabla \cdot \mathbf{u} = \rho$ är ekvivalent med $\rho = \partial_j u_j$.

Om vi kan visa att $\rho u_i = \partial_j (T_{ij})$ så får vi resultatet med den allmänna Gauss' satsen:

$$\int_V \rho u_i dV = \int_V \partial_j (T_{ij}) dV = \oint_S T_{ij} dS_j.$$

Vi kan alltså visa resultatet med följande räkning:

$$\begin{aligned}\rho u_i &= (\partial_j u_j) u_i = \partial_j \underbrace{(u_j u_i)}_{u_i u_j} - u_j \underbrace{\partial_j u_i}_{=\partial_i u_j} = \partial_j (u_i u_j) - \underbrace{u_j \partial_i u_j}_{=\frac{1}{2} \partial_i (u_j u_j) = \frac{1}{2} \partial_i (\mathbf{u}^2)} \\ &= \partial_j \left(-\frac{1}{2} \delta_{ij} \mathbf{u}^2 + u_i u_j \right)\end{aligned}$$

Detta visar resultatet med $\boxed{k_1 = -\frac{1}{2}, \quad k_2 = 1}.$

- (b) Transformationsmatrisen för en rotation med vinkeln α omkring den gemensamma $\mathbf{e}_2$ -axeln är

$$(L_{ij})_{i,j=1}^3 = (\mathbf{e}'_i \cdot \mathbf{e}_j)_{i,j=1}^3 = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & 0 & -\sin(\alpha) \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin(\alpha) & 0 & \cos(\alpha) \end{pmatrix}.$$

Detta ger

$$\begin{aligned}\boxed{T'_{13}} &= L_{1i} L_{3j} T_{ij} = L_{11} L_{31} T_{11} + L_{12} L_{32} T_{22} + L_{13} L_{33} T_{33} \\ &= \cos(\alpha) \sin(\alpha) C + 0 + (-\sin(\alpha)) \cos(\alpha) 3C = \boxed{-2 \sin(\alpha) \cos(\alpha) C}.\end{aligned}$$

Anmärkning: Det är alltid lite klurig med företecknet av $\sin(\alpha)$ — om det blir fel i tentamen är det inte hela världen.

Men det är bra att veta hur man kan härleda företecknet för en rotation omkring $\mathbf{e}_j$ -axeln, $j = 1, 2, 3$.

6. (i) $\mathbf{j} = -\lambda \nabla T$ med en materialkonstant λ ,
(ii) Gauss sats ger: $\oint_S \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S} = \int_V \nabla \cdot \mathbf{j} dV = \int_V k dV$, dvs., $\nabla \cdot \mathbf{j} = k$,
(iii) $T|_{r=R} = T_0$.

Detta ger differentialekvationen $\nabla \cdot \mathbf{j} = -\lambda \Delta T = k$.

Matematiska modellen för $T = T(\mathbf{r})$:

$$-\Delta T = \frac{k}{\lambda} \quad (|\mathbf{r}| < R), \quad T|_{|\mathbf{r}|=R} = T_0.$$

Systemet är rotationsinvariant $\Rightarrow T = T(r)$. Detta ger

$$-(\Delta T)(r) = \frac{1}{r^2} \partial_r(r^2 \partial_r T(r)) = -\frac{k}{\lambda} \Rightarrow \partial_r(r^2 \partial_r T(r)) = -\frac{k}{\lambda} r^2 \Rightarrow$$

$$r^2 \partial_r T(r) = -\frac{k}{3\lambda} r^3 + c_1 \Rightarrow \partial_r T(r) = -\frac{k}{3\lambda} r + \frac{c_1}{r^2} \Rightarrow T(r) = -\frac{k}{6\lambda} r^2 - \frac{c_1}{r} + c_2$$

med integrationskonstanter c_1 och c_2 .

Villkoret $|T(0)| < \infty$ kan bara vara uppfylld om $c_1 = 0$. Kravet $T(R) = T_0$ ger $c_2 = T_0(k/6\lambda)R^2$.

Svar:

$$T(r) = T_0 + \frac{k}{6\lambda}(R^2 - r^2).$$

[Kontroll:

$$\mathbf{j} = -\lambda \nabla T = -\lambda \mathbf{e}_r \partial_r T = \frac{k}{3} r \mathbf{e}_r$$

ger

$$\oint_{|\mathbf{r}|=R} \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S} = \oint_{|\mathbf{r}|=R} \frac{k}{3} r \mathbf{e}_r \cdot \mathbf{e}_r dS = R \frac{k}{3} \underbrace{\int_{|\mathbf{r}|=R} dS}_{4\pi R^2} = k \frac{4\pi R^3}{3} = k \int_{|\mathbf{r}| \leq R} dV. \quad (\text{OK!})$$

$$\mathbf{j} = \frac{k}{3} \mathbf{r} \Rightarrow \text{div}(\mathbf{j}) = \frac{k}{3} \underbrace{\text{div}(\mathbf{r})}_3 = k. \quad (\text{OK!})$$

$T(R) = T_0$. (OK!)]