



SF1673 Analys i en variabel
Tentamen
den 20 oktober 2023

Skrivtid: 08:00-13:00

Tillåtna hjälpmedel: inga

Examinator: Danijela Damjanović

Tentamen består av åtta uppgifter uppdelade i två delar. Del I utgörs av de fem första uppgifterna som testar förmågan att lösa grundläggande problem. Varje uppgift ger maximalt fyra poäng. Del II utgörs av de tre sista uppgifterna och testar förmågan att lösa mer avancerade problem som även kan vara av teoretisk karaktär och är avsedda främst för högre betyg. Varje uppgift ger maximalt sex poäng. Bonuspoäng från inlämningsuppgifterna adderas till erhållna poäng på del I. Betygsgränserna vid tentamen kommer att ges av följande tabell där kolumnerna anger poänggräns för respektive del.

Del	Poäng	Innehåll	Fx	E	D	C	B	A
I	20	Grundläggande problem	15	16	16	16	16	16
II	18	Avancerade problem	0	0	4	8	11	14

För full poäng på en uppgift krävs att lösningen är välpresenterad och lätt att följa. Det innebär speciellt att införda beteckningar ska definieras, att den logiska strukturen tydligt beskrivs i ord eller symboler och att resonemangen är välmotiverade och tydligt förklarade. Lösningar som allvarligt brister i dessa avseenden bedöms med högst två poäng.

DEL I – GRUNDLÄGGANDE PROBLEM

1. (a) Beräkna $y(2)$ då $y(1) = 9$ och $xy' + y \ln y = 0$, då $x > 0$. (3 p)
(b) Låt $y(x)$ beteckna en lösning av ekvationen $xy' + y \ln y = 0$. Undersök om graf av $y(x)$ har en horisontell asymptot. (1 p)

2. Bestäm ett polynom $P(x)$ av högst tredje graden, sådant att funktionen

$$f(x) = \begin{cases} \sin x, & x < 0 \\ P(x), & 0 \leq x \leq 1 \\ \ln x, & x > 1 \end{cases}$$

blir deriverbar. Motivera ditt svar.

(4 p)

3. Undersök konvergens/divergens av:

(a) $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + x - 2}$ och $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + x - 2}$. (2 p)

(b)
$$\sum_{n=2}^{n=\infty} \frac{\arctan n}{n^2 + n - 2}.$$
 (2 p)

4. Låt a vara ett reelt tal i intervall $(0, \frac{\pi}{2})$. Låt $V(a)$ beteckna volymen av den kropp som fås då området mellan kurvan $y = |\tan x|$ och x -axeln, för $-a \leq x \leq a$, roteras ett varv kring y -axeln. Beräkna $V(a)$ och $\lim_{a \rightarrow \frac{\pi}{2}-} V(a)$. (4 p)

5. Låt

$$f(x) = \begin{cases} (x+2)e^x, & -4 \leq x < 0 \\ x^2 - 4x + 2 & 0 \leq x \leq 3 \end{cases}$$

(a) Undersök om funktionen f har något största och minsta värde och bestäm i så fall dessa. (3 p)

(b) Är f deriverbar? Motivera ditt svar. (1 p)

DEL II – AVANCERADE PROBLEM

6. (a) Bevisa att om $f(x)$ är kontinuerlig på $[a, b]$ och $f'(x) < 0$ på (a, b) så är f strängt avtagande på $[a, b]$. Stämmer det att om f är strängt avtagande på $[a, b]$ och deriverbar på (a, b) så är $f'(x) < 0$? Motivera ditt svar. (4 p)

(b) Är $f(x) = \frac{1}{x}$ strängt avtagande i sin definitionsmängd? Motivera ditt svar. (2 p)

7. (a) Formulera och bevisa Analysens huvudsats. (4 p)

(b) Låt $f: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ vara en kontinuerlig funktion. Låt $A(a)$ beteckna arean mellan graf av f och x -axeln, där $0 \leq x \leq a$, $a > 0$. Anta att $A(a) = \arctan(a^2)$ för varje $a > 0$. Bestäm f och skissa graf af f . (2 p)

8. Anta att f är $(n+1)$ gången deriverbar och att $f^{(n+1)}$ är kontinuerlig. Låt $a \in \mathbb{R}$ vara en punkt där $f^{(n+1)}(a) \neq 0$. Anta att det finns en funktion $\theta: (-1, 1) \rightarrow (0, 1)$ sådant att f uppfyller

$$f(a+h) = f(a) + hf'(a) + \cdots + \frac{h^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(a) + \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(a + \theta(h)h).$$

Visa att

$$\lim_{h \rightarrow 0} \theta(h) = \frac{1}{n+1}.$$

(6 p)

Tips. Använd Taylor formel med polynom av grad n och resttermen.

Obs. $(-1, 1)$ och $(0, 1)$ betecknar öppna intervaller i mängden $\mathbb{R}$ av alla reela tal.