

TENTAMEN TEORETISK FYSIK SI1155/SI1151

Måndag 200525 kl 14:00-19:00

Skriv på varje sida	Namn och problemnummer
Motivera noga	Otillräckliga motiveringar leder till poängavdrag
Hjälpmedel	BETA, miniräknare
Poängsättning	6 poäng per problem
Examinator	Mats Wallin tel 073 765 2000

Obligatorisk hederkodex: Skriv följande text på ett tomt papper:

Jag försäkrar att jag har tagit del av och kommer att följa de regler som gäller för tentamen i kursen Teoretisk fysik. Jag kommer inte att använda några otillåtna hjälpmedel och jag kommer att lösa uppgifterna självständigt utan hjälp från någon annan.

Skriv under med datum, namnteckning och namnförtydligande. Pappret med din underskrivna hederskodex ska scannas och lämnas in elektroniskt i samma fil som dina lösningar för denna tentamen. Tentor som lämnas in utan underskriven hederskodex kommer att anses ogiltiga och kommer inte att rättas.

1. Tillståndet hos en partikel på en sfär med radie r ges av

$$\Psi = C(Y_1^1 + 2iY_1^0 + 3Y_1^{-1})$$

där klotfunktionerna Y_l^m är ON egenfunktioner till rörelsemängdsmomentoperatorerna.

- (a) Normera tillståndet genom att bestämma värdet på normeringskonstanten C .
- (b) Vilka värden kan fås vid en mätning av L_z och med vilka sannolikheter fås dessa värden?
- (c) Bestäm väntevärdet och osäkerheten hos L_z .

2. Ett elektronspinn i ett konstant magnetfält i x-riktningen har Hamiltonoperatören $H = \omega_0 S_x$ där $\omega_0 = eB/m$. Spinntillståndet vid tiden $t = 0$ är spinn upp i z-riktningen, χ_+^z . Bestäm energiegentillstånden, spinntillståndet $\chi(t)$ och väntevärdet $\langle S_z \rangle$ vid tiden t .

3. Två identiska partiklar är bundna i en gemensam endimensionell harmonisk oscillatorpotential $V^0 = \frac{1}{2}m\omega^2 x^2$.

- (a) Ange tvåpartikelgrundtillståndet och grundtillståndsenergin om partiklarna har spinn 0.
- (b) Ange tvåpartikelgrundtillståndet (inklusive spinn) och grundtillståndsenergin om partiklarna har spinn $s = 1/2$.
- (c) Använd stegoperatorer för att beräkna första ordningens korrektion till grundtillståndsenergin i (a) och (b) om partiklarna växelverkar med varandra med potentialen $V(x_1, x_2) = a(x_1 - x_2)^2$ som behandlas som en störning, där x_1, x_2 är partiklarnas positioner, och $a > 0$ är en konstant.

4. En partikel i en endimensionell harmonisk oscillatorpotential har energiegenvärden $E_n = (n + 1/2)\hbar\omega$, $n = 0, 1, 2, \dots$. Beräkna det termiska medelvärdet av energin

$$\langle E \rangle = \frac{\sum_n E_n \exp(-\beta E_n)}{\sum_n \exp(-\beta E_n)}$$

där $\beta = 1/(k_B T)$ är inversa temperaturen, och bestäm villkor för att systemet ska vara i grundtillståndet. Följ dessa steg:

(a) Beräkna summan $Z = \sum_n \exp(-\beta E_n)$.

(b) Använd resultatet i (a) för att beräkna $\sum_n E_n \exp(-\beta E_n)$ och sedan $\langle E \rangle$. Ledning: derivera!

(c) Sannolikheten att hitta systemet i grundtillståndet minskar med temperaturen. Bestäm ett uttryck för temperaturen som ger 90% sannolikhet att hitta systemet i grundtillståndet.

5. Hamiltonoperatoren för en spinnlös partikel med laddning q och massa m i ett likformigt magnetfält riktat i z-riktningen ges av

$$\hat{H} = \frac{1}{2m}(\hat{\mathbf{p}} - q\mathbf{A})^2$$

där $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} = (0, 0, B)$ fås tex med $\mathbf{A} = (0, Bx, 0)$. Studera en partikel i två dimensioner (xy-planet) med ansatsen

$$\Psi(x, y) = \psi_x(x)e^{ik_y y}$$

Bestäm energiegenvärdena. Ledning: Börja med ett enklare problem genom att först anta att $k_y = 0$, och lös sedan problemet för $k_y \neq 0$.

LYCKA TILL!

Spinn 1/2 egentillstånd

$$\chi_{\pm}^x = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ \pm 1 \end{pmatrix}, \quad \chi_{\pm}^y = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ \pm i \end{pmatrix}, \quad \chi_{+}^z = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \chi_{-}^z = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Lösning till tentamen i Teoretisk fysik 200525

1. Tillståndet hos en partikel på en sfär med radie r ges av

$$\Psi = C(Y_1^1 + 2iY_1^0 + 3Y_1^{-1})$$

där klotfunktionerna Y_l^m är ON egenfunktioner till rörelsemängdsmomentoperatorerna.

(a) Normera tillståndet genom att bestämma värdet på normeringskonstanten C .

(b) Vilka värden kan fås vid en mätning av L_z och med vilka sannolikheter fås dessa värden?

(c) Bestäm väntevärdet och osäkerheten hos L_z .

(a) Mha ortonormaliteten $\langle Y_l^m | Y_{l'}^{m'} \rangle = \delta_{l,l'} \delta_{m,m'}$ fås

$$\begin{aligned} \langle \Psi | \Psi \rangle &= |C|^2 \langle Y_1^1 + 2iY_1^0 + 3Y_1^{-1} | Y_1^1 + 2iY_1^0 + 3Y_1^{-1} \rangle \\ &= |C|^2 (\langle Y_1^1 | - 2i\langle Y_1^0 | + 3\langle Y_1^{-1} |)(|Y_1^1 \rangle + 2i|Y_1^0 \rangle + 3|Y_1^{-1} \rangle) = 14|C|^2 = 1 \end{aligned}$$

Välj $C=1/\sqrt{14}$.

(b) Möjliga mätvärden och sannolikheter:

$$m = 1 : L_z = \hbar, P(m = 1) = |\langle Y_1^1 | \Psi \rangle|^2 = \frac{1}{14} \approx 0.07$$

$$m = 0 : L_z = 0, P(m = 0) = |\langle Y_1^0 | \Psi \rangle|^2 = \frac{4}{14} \approx 0.29$$

$$m = -1 : L_z = -\hbar, P(m = -1) = |\langle Y_1^{-1} | \Psi \rangle|^2 = \frac{9}{14} \approx 0.64$$

kontroll: $0.07+0.29+0.64=1.00$

(c) Väntevärde=summan av sannolikheter $\times$ mätvärden:

$$\langle L_z \rangle = \sum_m P(m) m \hbar = \frac{1}{14} \hbar + 0 - \frac{9}{14} \hbar = -\frac{4}{7} \hbar = -0.57 \hbar$$

$$\langle L_z^2 \rangle = \sum_m P(m) (m \hbar)^2 = \frac{1}{14} \hbar^2 + 0 + \frac{9}{14} \hbar^2 = \frac{5}{7} \hbar^2$$

$$\Delta L_z = \sqrt{\langle L_z^2 \rangle - \langle L_z \rangle^2} = \sqrt{5/7 - 16/49} \hbar = \frac{\sqrt{19}}{7} \hbar = 0.62 \hbar$$

2. Ett elektronspinn i ett konstant magnetfält i x-riktningen har Hamiltonoperatören $H = \omega_0 S_x$ där $\omega_0 = eB/m$. Spinntillståndet vid tiden $t = 0$ är spinn upp i z-riktningen, χ_+^z . Bestäm energiegentillstånden, spinntillståndet $\chi(t)$ och väntevärdet $\langle S_z \rangle$ vid tiden t .

Energiegenvärden och energiegentillstånd (stationära tillstånd) är

$$E_{\pm} = \pm \frac{\hbar \omega_0}{2}, \quad \chi_{\pm}^x = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ \pm 1 \end{pmatrix}$$

Uttryck tillståndet vid tiden $t = 0$ i stationära tillstånd:

$$\chi(t=0) = \chi_+^z = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{\chi_+^x + \chi_-^x}{\sqrt{2}}$$

Tillståndet vid tiden t fås mha det kända tidsberoendet hos de stationära tillstånden:

$$\begin{aligned} \chi(t) &= \frac{1}{\sqrt{2}} (\chi_+^x e^{-iE_+ t/\hbar} + \chi_-^x e^{-iE_- t/\hbar}) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} e^{-i\omega_0 t/2} + e^{+i\omega_0 t/2} \\ e^{-i\omega_0 t/2} - e^{+i\omega_0 t/2} \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} e^{-i\omega_0 t/2} + e^{+i\omega_0 t/2} \\ e^{-i\omega_0 t/2} - e^{+i\omega_0 t/2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \omega_0 t/2 \\ -i \sin \omega_0 t/2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Väntevärdet blir

$$\begin{aligned} \langle S_z \rangle &= \langle \chi(t) | S_z | \chi(t) \rangle = (\cos \omega_0 t/2, i \sin \omega_0 t/2) \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \omega_0 t/2 \\ -i \sin \omega_0 t/2 \end{pmatrix} \\ &= \cos^2 \omega_0 t/2 - \sin^2 \omega_0 t/2 = \cos \omega_0 t \end{aligned}$$

3. Två identiska partiklar är bundna i en gemensam endimensionell harmonisk oscillatorpotential $V^0 = \frac{1}{2}m\omega^2 x^2$.

(a) Ange tvåpartikelgrundtillståndet och grundtillståndsenergin om partiklarna har spinn 0.

(b) Ange tvåpartikelgrundtillståndet (inklusive spinn) och grundtillståndsenergin om partiklarna har spinn $s = 1/2$.

(c) Använd stegoperatorer för att beräkna första ordningens korrektion till grundtillståndsenergin i (a) och (b) om partiklarna växelverkar med varandra med potentialen $V(x_1, x_2) = a(x_1 - x_2)^2$ som behandlas som en störning, där x_1, x_2 är partiklarnas positioner, och $a > 0$ är en konstant.

(a) Partiklarna är bosoner eftersom $s = 0$ och har därför symmetriskt grundtillstånd under utbyte. Ostört grundtillstånd är $\Psi_0(x_1, x_2) = \psi_0(x_1)\psi_0(x_2)$ där ψ_0 är enpartikelgrundtillståndet. Vektorform:

$$|\Psi_0\rangle = |0, 0\rangle$$

Grundtillståndsenergin är

$$E_0 = 2\frac{1}{2}\hbar\omega = \hbar\omega$$

(b) Partiklarna är fermioner eftersom $s = 1/2$ och har antisymmetriskt tillstånd under utbyte. Grundtillståndet är

$$|\Psi_0\rangle = |0, 0\rangle\chi_{\text{singlett}}$$

som är antisymmetrisk eftersom spinndelen är antisymmetrisk under utbyte. Grundtillståndsenergin blir därför samma som i (a):

$$E_0 = \hbar\omega$$

(c) Första ordningens korrektion till grundtillståndsenergin i (a) blir

$$E_0^1 = \langle\Psi_0^0|V|\Psi_0^0\rangle = \langle 0, 0|a(x_1 - x_2)^2|0, 0\rangle$$

Första ordningens korrektion till grundtillståndsenergin i (b) blir

$$E_0^1 = \langle\Psi_0^0|V|\Psi_0^0\rangle = \langle 0, 0|a(x_1 - x_2)^2|0, 0\rangle \underbrace{\langle\chi_{\text{singlett}}|\chi_{\text{singlett}}\rangle}_{=1}$$

dvs samma som för (a). Beräkna korrektionen:

$$E_0^1 = a(\underbrace{\langle 0|x_1^2|0\rangle}_{=0} + \underbrace{\langle 0|x_2^2|0\rangle}_{=0} - 2\underbrace{\langle 0|x_1|0\rangle}_{=0}\underbrace{\langle 0|x_2|0\rangle}_{=0}) = 2a\langle 0|x^2|0\rangle$$

Beräkna väntevärdet mha stegoperatorer:

$$\langle 0|x^2|0\rangle = \frac{\hbar}{2m\omega}\langle 0|(a^\dagger + a)^2|0\rangle = \frac{\hbar}{2m\omega}\langle 0|(a^\dagger)^2 + a^2 + a^\dagger a + \underbrace{aa^\dagger}_{=a^\dagger a+1}|0\rangle = \frac{\hbar}{2m\omega}$$

mha $\langle 0|(a^\dagger)^2|0\rangle = 0$, $\langle 0|a^2|0\rangle = 0$, $\langle 0|a^\dagger a|0\rangle = 0$, $\langle 0|0\rangle = 1$. Detta ger

$$E_0^1 = \frac{a\hbar}{m\omega}$$

4. En partikel i en endimensionell harmonisk oscillatorpotential har energiegenvärden $E_n = (n + 1/2)\hbar\omega, n = 0, 1, 2, \dots$. Beräkna det termiska medelvärdet av energin

$$\langle E \rangle = \frac{\sum_n E_n \exp(-\beta E_n)}{\sum_n \exp(-\beta E_n)}$$

där $\beta = 1/(k_B T)$ är inversa temperaturen, och bestäm villkor för att systemet ska vara i grundtillståndet. Följ dessa steg:

(a) Beräkna summan $Z = \sum_n \exp(-\beta E_n)$.

(b) Använd resultatet i (a) för att beräkna $\sum_n E_n \exp(-\beta E_n)$ och sedan $\langle E \rangle$. Ledning: derivera!

(c) Sannolikheten att hitta systemet i grundtillståndet minskar med temperaturen. Bestäm ett uttryck för temperaturen som ger 90% sannolikhet att hitta systemet i grundtillståndet.

(a) Beräkna Z som är en geometrisk serie mha $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1/(1-x)$:

$$Z = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\beta(n+1/2)\hbar\omega} = e^{-\beta\hbar\omega/2} \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{e^{-\beta n\hbar\omega}}_{(e^{-\beta\hbar\omega})^n} = \frac{e^{-\beta\hbar\omega/2}}{1 - e^{-\beta\hbar\omega}}$$

(b)

$$\begin{aligned} \sum_n E_n e^{-\beta E_n} &= -\frac{\partial}{\partial \beta} \sum_n e^{-\beta E_n} = -\frac{\partial}{\partial \beta} \frac{e^{-\beta\hbar\omega/2}}{1 - e^{-\beta\hbar\omega}} \\ &= \hbar\omega \frac{e^{-\beta\hbar\omega/2}}{(1 - e^{-\beta\hbar\omega})^2} e^{-\beta\hbar\omega} + \frac{\hbar\omega}{2} \frac{e^{-\beta\hbar\omega/2}}{1 - e^{-\beta\hbar\omega}} = \frac{e^{-\beta\hbar\omega/2}}{1 - e^{-\beta\hbar\omega}} \left(\frac{e^{-\beta\hbar\omega}}{1 - e^{-\beta\hbar\omega}} + \frac{1}{2} \right) \hbar\omega \\ &= Z \left(\frac{1}{e^{\beta\hbar\omega} - 1} + \frac{1}{2} \right) \hbar\omega \end{aligned}$$

Detta ger

$$\langle E \rangle = \frac{\sum_n E_n e^{-\beta E_n}}{Z} = \left(\frac{1}{e^{\beta\hbar\omega} - 1} + \frac{1}{2} \right) \hbar\omega = (\langle n \rangle + 1/2)\hbar\omega$$

där $\langle n \rangle = 1/(\exp(\beta\hbar\omega) - 1)$ är Bose-Einsteinfördelningen med $\mu = 0$.

(c)

$$\begin{aligned} P(n=0) &= \frac{e^{-\beta E_0}}{Z} = 1 - e^{-\beta\hbar\omega} = 0.9 \\ e^{-\beta\hbar\omega} &= 0.1 \\ \beta\hbar\omega &= \ln 10 \\ T &= \frac{\hbar\omega}{k_B \ln 10} \end{aligned}$$

5. Hamiltonoperatoren för en spinnlös partikel med laddning q och massa m i ett likformigt magnetfält riktat i z-riktningen ges av

$$\hat{H} = \frac{1}{2m}(\hat{\mathbf{p}} - q\mathbf{A})^2$$

där $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} = (0, 0, B)$ fås tex med $\mathbf{A} = (0, Bx, 0)$. Studera en partikel i två dimensioner (xy-planet) med ansatsen

$$\Psi(x, y) = \psi_x(x)e^{ik_y y}$$

Bestäm energiegenvärdena. Ledning: Börja med ett enklare problem genom att först anta att $k_y = 0$, och lös sedan problemet för $k_y \neq 0$.

Lösning med $k_y = 0$:

Med $k_y = 0$ är $\Psi(x, y) = \psi_x(x)$. Då blir

$$\hat{H}\Psi = \frac{1}{2m}(\hat{p}^2 + q^2 A^2 - q\hat{\mathbf{p}} \cdot \mathbf{A} - q\mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{p}})\psi_x(x)$$

Med $\mathbf{A} = (0, Bx, 0)$ blir korstermerna noll: $\hat{\mathbf{p}} \cdot \mathbf{A}\Psi = \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{p}}\Psi = \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial y} Bx\psi_x(x) = 0$. Lösningen förenklas ytterligare av att $\hat{p}^2\Psi = \hat{p}_x^2\Psi$ eftersom $\hat{p}_y^2\Psi = 0$. Detta ger

$$\hat{H}\Psi = \frac{1}{2m}(\hat{p}_x^2 + (Bq)^2 x^2)\Psi = E\Psi$$

Detta är en *endimensionell* harmonisk oscillator med $\frac{1}{2m}(Bq)^2 = \frac{1}{2}m\omega^2$ där $\omega = |Bq|/m$ är cyklotronfrekvensen. Energiegenvärdena blir därför

$$E_n = (n + 1/2)\hbar\omega = (n + 1/2)\frac{\hbar|Bq|}{m}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Lösning med $k_y \neq 0$:

Nu till det fulla problemet med $\Psi = \psi_x(x)e^{ik_y y}$. Korstermerna ger nu

$$\hat{\mathbf{p}} \cdot \mathbf{A}\Psi + \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{p}}\Psi = 2\frac{\hbar}{i}Bx\frac{\partial}{\partial y}\psi_x(x)e^{ik_y y} = 2p_y Bx\Psi$$

där $p_y = \hbar k_y$. SE blir med $\hat{p}_y^2\Psi = p_y^2\Psi$:

$$\hat{H}\Psi = \frac{1}{2m}(\hat{p}_x^2 + p_y^2 + q^2 B^2 x^2 - 2p_y Bqx)\Psi = \frac{1}{2m} \left[p_x^2 + (Bq)^2 \left(x - \frac{p_y}{Bq} \right)^2 \right] \Psi = E\Psi$$

Detta är en endimensionell harmonisk oscillator kring $x = p_y/Bq$ med samma energiegenvärden som ovan:

$$E_n = (n + 1/2)\frac{\hbar|Bq|}{m}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Detta problem löstes 1937 av Lev Landau och egentillstånden kallas Landaunivåer.