

TENTAMEN I VEKTORANALYS
SI1146 Vektoranalys, HT2023

Torsdagen den 19 oktober 2023, kl 14.00 – 19.00

Anteckna på varje blad: Namn, utbildningslinje, årskurs och problemnummer.
Tillåtna hjälpmedel: Formelblad som delas ut (ingen räknedosa).

Examinator: Edwin Langmann (Epost: langmann@kth.se)

Bonuspoängen från HT2023 adderas till tentauppgift 1, dock max 6 poäng totalt.

Lösningar: Kommer att finnas på kurshemsidan.

Poäng: Varje uppgift kan ge 6 poäng.

Motivera utförligt! Otillräckliga motiveringar kan medföra poängavdrag.

Notation: (i) (x, y, z) är kartesiska koordinater, och $\mathbf{r} = x\mathbf{e}_x + y\mathbf{e}_y + z\mathbf{e}_z$ är Ortsvektorn. (ii) (ρ, φ, z) är cylinderkoordinater så att $x = \rho \cos(\varphi)$, $y = \rho \sin(\varphi)$. (iii) (r, θ, φ) är sfäriska koordinater så att $x = r \sin(\theta) \cos(\varphi)$, $y = r \sin(\theta) \sin(\varphi)$, $z = r \cos(\theta)$. (iv) $\Delta = \nabla \cdot \nabla$ är Laplace operatoren. (v) t är tiden, och $\partial_t = \frac{\partial}{\partial t}$.

1. (a) Beräkna $\operatorname{div} \mathbf{B}$ och $\operatorname{rot} \mathbf{B}$ för vektorfältet $\mathbf{B} = \rho \mathbf{e}_\varphi$. (2p)
(b) Har vektorfältet $\mathbf{B}$ i (a) en vektorpotential $\mathbf{A}$? Om ja, så beräkna en vektorpotential så att $A_\rho = A_\varphi = 0$ och $A_z = f(\rho)$. (2p)
(c) Ett koordinatsystem (u, v, w) i $\mathbb{R}^3$ är ortogonalt och har skalfaktorerna

$$h_u = h_v = \sqrt{u^2 + v^2}, \quad h_w = uv \quad (uv > 0).$$

Beräkna $\Delta \Phi$, där $\Phi = (u^2 + v^2)^2$ är ett skalärfält i koordinaterna (u, v, w) . (2p)

2. (a) Visa att

$$\mathbf{u} \times (\nabla \times \mathbf{u}) = c_1 \nabla(\mathbf{u}^2) + c_2(\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u}$$

med vissa konstanter c_1 och c_2 som du skall beräkna. (3p)

- (b) Visa att

$$\int_S \nabla \Phi \times d\mathbf{S} = c \oint_C \Phi d\mathbf{r} \quad (1)$$

med en viss konstant c som du skall bestämma; S är en godtycklig yta med rand C och normalriktningen $\mathbf{n}$, dvs., ytintegrationselementet är $d\mathbf{S} = \mathbf{n} dS$; skalärfältet Φ är deriverbart. (3p)

3. Ett vektorfält har potentialen $\Phi = a^2(x^2 + y^2 + z^2) - (x^2 + y^2 + z^2)^2$ där $a > 0$ är en konstant. Genom vilken slutna yta S är flödet av vektorfältet $\nabla \Phi$ maximalt? Beräkna det maximala flödet? (6p)

4. Elektriska fältet $\mathbf{E} = \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ och magnetiska fältet $\mathbf{B} = \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$ uppfyller Maxwell ekvationerna

$$(i) \nabla \cdot \mathbf{E} = \rho, \quad (ii) \nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (iii) \nabla \times \mathbf{E} + \frac{1}{c} \partial_t \mathbf{B} = \mathbf{0}, \quad (iv) \nabla \times \mathbf{B} - \frac{1}{c} \partial_t \mathbf{E} = \frac{1}{c} \mathbf{J}$$

där c är ljusets hastighet i vakuum, $\rho = \rho(\mathbf{r}, t)$ är laddningstätheten och $\mathbf{J} = \mathbf{J}(\mathbf{r}, t)$ elektriska strömtätheten.

- (a) Visa att det finns ett skalärfält $\Phi = \Phi(\mathbf{r}, t)$ och ett vektorfält $\mathbf{A} = \mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$ så att Maxwell ekvationerna (ii) och (iii) är uppfyllda om

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}, \quad \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \partial_t \mathbf{A} - \nabla \Phi;$$

Φ kallas skalärpotential och $\mathbf{A}$ vektorpotential. (2p)

- (b) Visa att Φ och $\mathbf{A}$ i (a) uppfyller inhomogena vågekvationen om villkoret

$$\frac{1}{c} \partial_t^2 \Phi + \nabla \cdot \mathbf{A} = 0$$

är uppfyllt. *Anmärkning:* Ett skalärfält $u = u(\mathbf{r}, t)$ uppfyller inhomogena vågekvationen om $\frac{1}{c^2} \partial_t^2 u - \Delta u = k$ med $k = k(\mathbf{r}, t)$. (4p)

5. Beräkna stationära temperaturfördelningen $T = T(r)$ inom klotet $0 \leq r \leq R$ med radie R där det finns en konstant värmestäthet k i hela klotet och temperaturen vid randen $r = R$ är konstant och lika med T_0 . Temperaturen uppfyller differentialekvationen $-\Delta T = k/\lambda$ där λ är en materialkonstant. *Ledning:* OBS att $|T| < \infty$ i hela klotet. (6p)
6. Hastighetsfältet $\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{r})$ hos en orkan uppfyller ekvationerna

$$(i) \nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad (ii) \nabla \times \mathbf{u} = \mathbf{w} \tag{2}$$

där

$$\mathbf{w} = \frac{k}{\sqrt{x^2 + y^2}} e^{-\lambda \sqrt{x^2 + y^2}} \mathbf{e}_z$$

med konstanter $k > 0$ och $\lambda > 0$. (a) Ge fysikaliska tolkningar av ekvationerna (i) och (ii) i (2). (b) Beräkna hastighetsfältet $\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{r})$ så att $|\mathbf{u}| < \infty$ i $(x, y) = (0, 0)$. (6p)

LYCKA TILL!

Lösningsföreläsning tentamen SI1146, 19 oktober 2023

NOTE: I typed this in quickly and did not check: this will probably be corrected!!!!

This is a suggested solution of an exam and not pedagogical material: I skip some details and only write $(\dots)$; if you don't understand $(\dots)$, look at the course book for explanations.

1. (a)

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = \frac{1}{\rho} \partial_\varphi(\rho) = 0, \quad \operatorname{rot} \mathbf{B} = \frac{1}{\rho} \begin{vmatrix} \mathbf{e}_\rho & \rho \mathbf{e}_\varphi & \mathbf{e}_z \\ \partial_\rho & \partial_\varphi & \partial_z \\ 0 & \rho^2 & 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{\rho} \mathbf{e}_z 2\rho = 2\mathbf{e}_z.$$

Svar: $\boxed{\operatorname{div} \mathbf{B} = 0}$, $\boxed{\operatorname{rot} \mathbf{B} = 2\mathbf{e}_z}$.

(b) Det finns en vektorpotential $\mathbf{A}$ pga. $\operatorname{div} \mathbf{B} = 0$. $\mathbf{B} = \operatorname{rot} \mathbf{A}$ och ansatsen $\mathbf{A} = f(\rho)\mathbf{e}_z$ ger

$$\rho \mathbf{e}_\varphi = \nabla \times \mathbf{A} = \frac{1}{\rho} \begin{vmatrix} \mathbf{e}_\rho & \rho \mathbf{e}_\varphi & \mathbf{e}_z \\ \partial_\rho & \partial_\varphi & \partial_z \\ 0 & 0 & f(\rho) \end{vmatrix} = -\mathbf{e}_\varphi f'(\rho)$$

ger

$$f'(\rho) = -\rho$$

som har en lösning $f(\rho) = -\rho^2/2$, t.ex. Svar: $\mathbf{A} = -(\rho^2/2)\mathbf{e}_z$ är en vektorpotential till $\mathbf{B}$.

(c)

$$\begin{aligned} \Delta \Phi &= \frac{1}{h_u h_v h_w} \left(\partial_u \frac{h_v h_w}{h_u} \partial_u \Phi + \partial_v \frac{h_w h_u}{h_v} \partial_v \Phi + \partial_w \frac{h_u h_v}{h_w} \partial_w \Phi \right) \\ &= \frac{1}{(u^2 + v^2)uv} \left(\partial_u uv \underbrace{\partial_u (u^2 + v^2)^2}_{(u^2 + v^2)4u} + \partial_v uv \underbrace{\partial_v (u^2 + v^2)^2}_{(u^2 + v^2)4v} + \partial_w \frac{(u^2 + v^2)}{uv} \underbrace{\partial_w (u^2 + v^2)^2}_0 \right) \\ &= \frac{1}{(u^2 + v^2)uv} \left(\partial_u (4u^2 v (u^2 + v^2)) + \partial_v (4uv^2 (u^2 + v^2)) \right) \\ &= \frac{1}{(u^2 + v^2)uv} \left(8uv(u^2 + v^2) + 2u^2 v \cdot 2u + 8uv(u^2 + v^2) + 2uv^2 \cdot 2v \right) \\ &= \frac{1}{(u^2 + v^2)uv} (24uv(u^2 + v^2)) = 24. \end{aligned}$$

Svar: $\boxed{\Delta \Phi = 24}$

2. (a)

$$[\mathbf{u} \times (\nabla \times \mathbf{u})]_i = \epsilon_{ijk} u_j \underbrace{[\nabla \times \mathbf{u}]_k}_{\epsilon_{klm} \partial_l u_m} = \underbrace{\epsilon_{ijk} \epsilon_{lmk}}_{\delta_{il} \delta_{jm} - \delta_{im} \delta_{jl}} u_j \partial_l u_m = u_j \partial_l u_m - u_j \partial_j u_i$$

$$= \frac{1}{2} \partial_i (u_j u_j) - u_j \partial_j u_i = [\frac{1}{2} \nabla(\mathbf{u}^2) - (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}]_i$$

ger $\mathbf{u} \times (\nabla \times \mathbf{u}) = \frac{1}{2} \nabla(\mathbf{u}^2) - (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}$. Svar: $c_1 = 1/2$, $c_2 = -1$.

(b) Om $\mathbf{a}$ är en godtycklig konstant vektor, så är

$$\mathbf{a} \cdot \int_S \nabla \Phi \times d\mathbf{S} = \int_S \mathbf{a} \cdot (\nabla \Phi \times d\mathbf{S}) = - \int_S \nabla \times (\mathbf{a} \Phi) \cdot d\mathbf{S} = - \oint_C \mathbf{a} \Phi \cdot d\mathbf{r} = -\mathbf{a} \cdot \oint_C \Phi d\mathbf{r}.$$

Detta ger (välj $\mathbf{a} = \mathbf{e}_i$, $i = 1, 2, 3$)

$$\int_S \nabla \Phi \times d\mathbf{S} = - \oint_C \Phi d\mathbf{r},$$

dvs., $c = -1$.

3. Flödet är

$$\oint_{\partial V} \nabla \Phi \cdot d\mathbf{S} = \int_V \Delta \Phi dV$$

pga. Gauss sats. $\Phi = a^2 r^2 - r^4$ ger

$$\Delta \Phi = \partial_r^2 \Phi + \frac{1}{r} \partial_r \Phi = \underbrace{\partial_r^2 (a^2 r^2 - r^4)}_{2a^2 - 12r^2} + \frac{2}{r} \underbrace{\partial_r (a^2 r^2 - r^4)}_{2a^2 r - 4r^3} = 6a^2 - 20r^2 = 6a^2 - 20(x^2 + y^2 + z^2).$$

Flödet blir då

$$\oint_{\partial V} \nabla \Phi \cdot d\mathbf{S} = \int_V (6a^2 - 20(x^2 + y^2 + z^2)) dV,$$

som är maximalt om $6a^2 - 20(x^2 + y^2 + z^2) \geq 0$, dvs.,

$$x^2 + y^2 + z^2 \leq \frac{6a^2}{20} = \frac{3}{10} a^2.$$

Flödet blir maximalt för ett klot $x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2$ med radie $R = \sqrt{\frac{3}{10}} a$. Maximala flödet blir

$$\begin{aligned} \int_V (6a^2 - 20(x^2 + y^2 + z^2)) dV &= 4\pi \int_0^R (6a^2 - 20r^2) r^2 dr = 4\pi (6a^2 R^3/3 - 20R^5/5) \\ &= 4\pi (2a^2 R^3 - 4R^5) = 4\pi a^5 (2(3/10)^{3/2} - 4(3/10)^{5/2}) = 4\pi a^5 (3/10)^{1/2} \underbrace{(6/10 - 4 \cdot 9/100)}_{6/25} \\ &= \frac{24\pi}{25} \sqrt{\frac{3}{10}} a^5 \approx 0.5258 a^5. \end{aligned}$$

[Test: Om räkningen är rätt, så måste flödet $F(R) := 4\pi(6a^2 R^3/3 - 20R^5/5)$ genom sfärytan $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ (som beräknades ovan) blir maximalt för $R = \sqrt{\frac{3}{10}} a$. Stämmer det?

$$F'(R) = 4\pi(6a^2 R^2 - 20R^4) = 8R^2 \pi(3a^2 - 10R^2)$$

blir 0 vid $R = 0$ (flödesminiumum) och $R = \sqrt{\frac{3}{10}} a$ (flödesmaximum). OK.]

4. (a) Enl. teori, $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ om och bara om $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ för ett vektorfält $\mathbf{A}$. Detta och (iii) ger

$$\nabla \times \mathbf{E} + \frac{1}{c} \underbrace{\partial_t \nabla \times \mathbf{A}}_{\nabla \times \partial_t \mathbf{A}} = \nabla \times (\mathbf{E} + (1/c)\partial_t \mathbf{A}) = \mathbf{0},$$

som är uppfylld (enl. teori) om och bara om $\mathbf{E} + (1/c)\partial_t \mathbf{A} = -\nabla \Phi$ för ett vektorfält Φ , dvs., om och bara om $\mathbf{E} = -(1/c)\partial_t \mathbf{A} - \nabla \Phi$.

- (b) (i) och $\mathbf{E} = -(1/c)\partial_t \mathbf{A} - \nabla \Phi$ ger

$$\rho = \nabla \cdot \mathbf{E} = \nabla \cdot (-(1/c)\partial_t \mathbf{A} - \nabla \Phi) = -\frac{1}{c} \partial_t \underbrace{\nabla \cdot \mathbf{A}}_{-(1/c)\partial_t \Phi} - \Delta \Phi = \frac{1}{c^2} \partial_t^2 \Phi - \Delta \Phi,$$

som visar att Φ uppfyller inhomogena vågekvationen.]

- (iv), $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ och $\mathbf{E} = -(1/c)\partial_t \mathbf{A} - \nabla \Phi$ ger

$$\begin{aligned} \frac{1}{c} \mathbf{J} &= \nabla \times \mathbf{B} - \frac{1}{c} \partial_t \mathbf{E} = \underbrace{\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A})}_{\nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \Delta \mathbf{A}} - \underbrace{\frac{1}{c} \partial_t (-(1/c)\partial_t \mathbf{A} - \nabla \Phi)}_{-(1/c^2)\partial_t^2 \mathbf{A} - \nabla((1/c)\partial_t \Phi)} \\ &= \frac{1}{c^2} \partial_t^2 \mathbf{A} - \Delta \mathbf{A} + \underbrace{\nabla(\nabla \cdot \mathbf{A} + (1/c)\partial_t \Phi)}_0 = \frac{1}{c^2} \partial_t^2 \mathbf{A} - \Delta \mathbf{A}, \end{aligned}$$

som visar att $\mathbf{A}$ uppfyller inhomogena vågekvationen.

5. $T = T(r)$ uppfyller

$$\begin{aligned} (\Delta T)(r) &= \frac{1}{r^2} \partial_r (r^2 \partial_r T(r)) = -k/\Lambda \Rightarrow \partial_r (r^2 \partial_r T(r)) = -kr^2/\Lambda \Rightarrow r^2 \partial_r T(r) = -kr^3/3\lambda + c_1 \\ &\Rightarrow \partial_r T(r) = -kr/3\lambda + c_1/r^2 \Rightarrow T(r) = -kr^2/6\lambda - c_1/r + c_2 \end{aligned}$$

med integrationskonstanter c_1, c_2 . Villkoret $|T(0)| < \infty$ ger $c_1 = 0$. Villkoret $T(R) = T_0$ ger

$$c_2 = T_0 + kR^2/6\lambda.$$

Svar: $T(r) = T_0 + \frac{k}{6\lambda}(R^2 - r^2)$.

6. (a) Ekv. (2)(i) och Gauss sats ger

$$\oint_S \mathbf{u} \cdot d\mathbf{S} = 0$$

för godtyckliga volymen V som omslutas av randytan S ; tolknigen är att vektorfältet $\mathbf{w}$ är källfritt och stationärt, dvs., flödet av $\mathbf{u}$ ur en godtycklig volumen är alltid 0.

Ekv. (2)(ii) och Stokes teorem ger

$$\oint_{\partial S} \mathbf{u} \cdot d\mathbf{r} = \int_C \mathbf{w} \cdot d\mathbf{S}$$

för godtyckliga ytor S med randcurvan C ; tolkningen är att $\mathbf{w}$ är virveltätheten av $\mathbf{u}$, dvs., circulationen av $\mathbf{u}$ omkring en godtycklig sluten curvan C är lika med flödet av $\mathbf{w}$ genom alla ytor S som umslutas av C .

(b) Ansatsen

$$\mathbf{u}(\mathbf{r}) = f(\rho)\mathbf{e}_\varphi$$

i cylinderkoordinater ger

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = \frac{1}{\rho} \partial_\varphi(f(\rho)) = 0$$

och

$$\mathbf{w} = w_0 e^{-\lambda\rho} \mathbf{e}_z = \text{rot } \mathbf{u} = \frac{1}{\rho} \begin{vmatrix} \mathbf{e}_\rho & \rho\mathbf{e}_\varphi & \mathbf{e}_z \\ \partial_\rho & \partial_\varphi & \partial_z \\ 0 & \rho f(\rho) & 0 \end{vmatrix} = \mathbf{e}_z \frac{1}{\rho} \partial_\rho(\rho f(\rho))$$

ger

$$\frac{1}{\rho} \partial_\rho(\rho f(\rho)) = \frac{k}{\rho} e^{-\lambda\rho} \Rightarrow f(\rho) = \frac{c_1 - \frac{k}{\lambda} e^{-\lambda\rho}}{\rho}.$$

Villkoret $|f(0)| < \infty$ ger $c_1 = k/\lambda$ (OBS att $\lim_{\rho \rightarrow 0} (1 - e^{-\lambda\rho})/\rho = \lambda$).

Svar:

$$\mathbf{u}(\mathbf{r}) = \frac{k}{\lambda\rho} (1 - e^{-\lambda\rho}) \mathbf{e}_\varphi = \frac{k}{\lambda} (1 - e^{-\lambda\sqrt{x^2+y^2}}) \frac{(-y, x, 0)}{x^2 + y^2}.$$