



KTH Teknikvetenskap

SF1672 Linjär algebra
Tentamen fredag, 12 januari 2024, 08:00–11:00
Examinator: Tilman Bauer
Tillåtna hjälpmedel: inga

Tentamen består av sex uppgifter fördelade på tre delar. Del A testar förmågan att lösa grundläggande standardproblem. Del B innehåller lite svårare problem. Del C testar förmågan att lösa avancerade problem som även kan vara av teoretisk karaktär och är avsedda främst för högre betyg.

Bonuspoäng från del A av inlämningsuppgifterna adderas till erhållna poäng på del A och motsvarande för del B. (Bonuspoäng räknas bara under samma läsår.)

Betygsgränserna vid tentamen ges av följande tabell:

Betyg	A	B	C	D	E	Fx
Totalt	27	24	21	18	16	15
varav från del C	6	3				

Lösningarna måste vara väl presenterade och lätta att följa. Det innebär speciellt att införda beteckningar ska definieras, att den logiska strukturen tydligt beskrivs i ord eller symboler och att resonemangen är väl motiverade och tydligt förklarade. Lösningar som allvarligt brister i dessa avseenden tilldelas inte full poäng.

Del A

1. Låt

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

- a) Bestäm en ortonormalbas $\mathcal{B}$ till nollrummet $\ker(A)$. (3 p)
- b) Utvidga $\mathcal{B}$ till en ortonormalbas $\mathcal{C}$ för hela $\mathbb{R}^4$. (3 p)

2. Tre linjer i planet ges av

$$L_1: x + 2y = 2; \quad L_2: x - 3y = 2; \quad L_3: 2x - y = -1.$$

- a) Bestäm arean av den triangel Δ som begränsas av de tre linjerna. (3 p)
- b) Beräkna arean av bilden $f(\Delta)$ av Δ under den linjära avbildning f som ges av matrisen $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$. (3 p)

Del B

3. Låt $\mathbf{b}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{b}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{b}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

- a) Bestäm en matris som har $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3$ som egenvektorer med motsvarande egenvärden 1, 0 respektive -1 . (3 p)
- b) Bestäm en matris som har $\mathbf{b}_1$ som egenvektor med egenvärde 1 men inga ytterligare egenvektorer som inte är multipla av $\mathbf{b}_1$, om det är möjligt. (2 p)
- c) Bestäm en 3×3 -matris utan några egenvektorer, eller motivera varför detta inte är möjligt. (1 p)

4. Låt P_n vara vektorrummet av alla polynom av grad $\leq n$ och definiera en avbildning $f: P_n \rightarrow P_n$ genom $f(p)(x) = (x+1)p'(x) + p(0)$.
- a) Visa att f är en linjär avbildning. (2 p)
 - b) Bestäm en avbildningsmatris för f med avseende på en valfri bas. (2 p)
 - c) Bestäm $\det(f)$. (2 p)

Del C

5. En kvadratisk form på $\mathbb{R}^4$ är definierad av

$$Q(\mathbf{x}) = x_1x_2 - x_3x_4.$$

låt

- a) Avgör om Q är positivt/negativt (semi)definit eller indefinit. (2 p)
- b) Är mängden $Z = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^4 \mid Q(\mathbf{x}) = 0\}$ ett linjärt delrum? (1 p)
- c) Bestäm ett maximalt linjärt delrum V av $\mathbb{R}^4$ sådant att $Q(\mathbf{x}) = 0$ för alla $\mathbf{x} \in V$. (3 p)

6. Låt V vara vektorrummet av alla begränsade reella talföljder $(a_n)_{n \geq 1}$. På V definieras en produkt

$$\langle (a_n), (b_n) \rangle = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} a_i b_i$$

syke

- a) Visa att $\langle (a_n), (b_n) \rangle$ är en väldefinierad inre produkt på V . (3 p)
- b) Låt W vara delrummet som spänns upp av följderna δ_i för $i \geq 1$, där δ_i är den talföljd som uppfyller $(\delta_i)_n = \begin{cases} 1; & i = n \\ 0; & i \neq n \end{cases}$. Är $W = V$? (1 p)
- c) Beräkna det ortogonala komplementet $W^\perp$ i V . (2 p)