



SF1683 Differentialekvationer och transformmetoder, del 1
Tentamen
Tisdag den 22 oktober 2024

Skrivtid: 08:00-12:00

Tillåtna hjälpmedel: inga (förutom det bifogade formelbladet)

Examinator: Mattias Dahl

Tentamen består av sex uppgifter uppdelade i två delar. Del I utgörs av de tre första uppgifterna som testar förmågan att lösa grundläggande problem. Del II utgörs av de tre sista uppgifterna och testar förmågan att lösa mer avancerade problem som även kan vara av teoretisk karaktär och är avsedda främst för högre betyg. Varje uppgift ger maximalt fyra poäng. Bonuspoäng från lappskrivningarna adderas till erhållna poäng på del I upp till maximalt 12 poäng.

Betygsgränserna vid tentamen ges av följande tabell.

Fx	E	D	C	B	A
11	12	14	16	19	21

För full poäng på en uppgift krävs att lösningen är väl presenterad och lätt att följa. Det innebär speciellt att införda beteckningar ska definieras, att den logiska strukturen tydligt beskrivs i ord eller symboler och att resonemangen är väl motiverade och tydligt förklarade. Lösningar som allvarligt brister i dessa avseenden bedöms med högst två poäng.

DEL I – GRUNDLÄGGANDE PROBLEM

1. Lös följande initialvärdesproblem för $y = y(x)$ och bestäm lösningarnas existensintervall.

(a) $y' = -3y^{4/3} \sin x$, $y(\pi/2) = 1$, (b) $y^2 + 4xy + (2xy + 2x^2) \frac{dy}{dx} = 0$, $y(1) = 1$.

(För båda problemen kan lösningen skrivas på explicit form.) (4 p)

2. Den homogena ekvationen $y'' - 6t^{-2}y = 0$ för $y = y(t)$, $t > 0$, har en lösning $y_1(t) = t^{-2}$. Bestäm den allmänna lösningen till den inhomogena ekvationen

$$y'' - 6t^{-2}y = 5t - 4.$$

(4 p)

3. Matrisen $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -4 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ har det dubbla egenvärdet $r = -3$. Bestäm den fundamentalmatris $\Phi(t)$ till systemet $\mathbf{x}'(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t)$ för vilken $\Phi(0)$ är lika med identitetsmatrisen $\mathbf{I}$. (4 p)

DEL II – AVANCERADE PROBLEM

4. Visa att ekvationen

$$x^2 y'' + xy' + (x-1)y = 0$$

för $y = y(x)$ har en reguljär singulär punkt vid $x = 0$. Bestäm en serielösning av Frobeniustyp vid $x = 0$ till ekvationen. För detta ska du ange den rekursionsrelation som ger koefficienterna i serielösningen, samt beräkna minst fyra noll-skiljda termer. För vilka x konvergerar denna serielösning? Förklara också varför denna serieansats inte ger en andra linjärt oberoende lösning. **(4 p)**

5. Den icke linjära ekvationen

$$x'' + (1 - (x')^2)x' + x = 0$$

för $x = x(t)$ har en lösning $x(t) = 0$. Om vi sätter $y(t) = x'(t)$ så ger ekvationen ett autonomt system för $(x(t), y(t))$ för vilket $(0, 0)$ är en kritisk punkt.

- (a) Förklara vad det betyder att en kritisk punkt är (asymptotiskt) stabil resp. instabil.
- (b) Vad säger metoden med linjärisering om stabiliteten för den kritiska punkten i denna uppgift?
- (c) Visa att den kritiska punkten är stabil med Lyapunovs metod.

(4 p)

6. Denna uppgift gäller existens och entydighet för lösningar
- $y = y(t)$
- till initialvärdesproblemet

$$y' = f(t, y), \quad y(0) = 0,$$

där funktionen $f(t, y)$ är definierad på en rektangel R i ty -planet med $(0, 0) \in R$.

- (a) Formulera Picards sats som garanterar att initialvärdesproblemet har en unik lösning. Var noggrann när du anger villkoren i satsen.

I beviset av Picards sats definieras en följd av $y = \phi_n(t)$ av approximativa lösningar genom $\phi_0(t) = 0$ och $\phi_{n+1}(t) = \int_0^t f(s, \phi_n(s)) ds$. En del av beviset visar att det finns ett $h > 0$ så att alla $\phi_n(t)$ är definierade för $|t| \leq h$. Weierstrass M -test säger att om en följd av funktioner $f_k(t)$ uppfyller $|f_k(t)| \leq M_k$ för alla t där $\sum_{k=0}^{\infty} M_k$ konvergerar så konvergerar serien av funktioner $\sum_{k=0}^{\infty} f_k(t)$ likformigt.

- (b) Visa att följden $f_k(t) = \phi_k(t) - \phi_{k-1}(t)$ uppfyller villkoren för Weierstrass M -test. Förklara kort hur existensen av en lösning följer av detta.

(4 p)

FORMELBLAD

Trigonometriska formler

- (1) $\sin(\pi - \alpha) = \sin \alpha$
- (2) $\cos(\pi - \alpha) = -\cos \alpha$
- (3) $\sin n\pi = 0, \quad n \in \mathbb{Z}$
- (4) $\cos n\pi = (-1)^n, \quad n \in \mathbb{Z}$
- (5) $\sin \alpha = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$
- (6) $\tan \alpha = \cot\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$
- (7) $\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$
- (8) $\cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$
- (9) $\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1$
- (10) $\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta$
- (11) $\cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta$
- (12) $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$
- (13) $\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$
- (14) $\sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)]$
- (15) $\sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2}[\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)]$
- (16) $\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)]$
- (17) $\sin^2 \alpha = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2\alpha$
- (18) $\cos^2 \alpha = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2\alpha$
- (19) $\sin^3 \alpha = \frac{1}{4}(3 \sin \alpha - \sin 3\alpha)$
- (20) $\cos^3 \alpha = \frac{1}{4}(3 \cos \alpha + \cos 3\alpha)$
- (21) $e^{i\alpha} = \cos \alpha + i \sin \alpha$
- (22) $\cos \alpha = \frac{1}{2}(e^{i\alpha} + e^{-i\alpha})$
- (23) $\sin \alpha = \frac{1}{2i}(e^{i\alpha} - e^{-i\alpha})$
- (24) $\cosh \alpha = \frac{1}{2}(e^\alpha + e^{-\alpha})$
- (25) $\sinh \alpha = \frac{1}{2}(e^\alpha - e^{-\alpha})$
- (26) $\cosh^2 \alpha - \sinh^2 \alpha = 1$

Integraler

- (27) $\int x^p dx = \frac{1}{p+1} x^{p+1}, \quad p \neq -1$
- (28) $\int \frac{1}{ax+b} dx = \frac{1}{a} \ln |ax+b|$

- (29) $\int \frac{1}{a^2 + x^2} dx = \frac{1}{a} \tan^{-1} \frac{x}{a}$
- (30) $\int \frac{1}{ax^2 + bx + c} dx = \frac{2}{\sqrt{4ac - b^2}} \tan^{-1} \frac{2ax + b}{\sqrt{4ac - b^2}}$
- (31) $\int \frac{1}{(x+a)(x+b)} dx = \frac{1}{b-a} \ln \frac{a+x}{b+x}, \quad a \neq b$
- (32) $\int \sqrt{x^2 \pm a^2} dx = \frac{1}{2} x \sqrt{x^2 \pm a^2} \pm \frac{1}{2} a^2 \ln |x + \sqrt{x^2 \pm a^2}|$
- (33) $\int \sqrt{a^2 - x^2} dx = \frac{1}{2} x \sqrt{a^2 - x^2} + \frac{1}{2} a^2 \tan^{-1} \frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}}$
- (34) $\int \frac{1}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} dx = \ln |x + \sqrt{x^2 \pm a^2}|$
- (35) $\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = \sin^{-1} \frac{x}{a}$
- (36) $\int x^p \ln ax dx = x^{p+1} \left(\frac{\ln ax}{p+1} - \frac{1}{(p+1)^2} \right), \quad p \neq -1$
- (37) $\int \frac{\ln ax}{x} dx = \frac{1}{2} (\ln ax)^2$
- (38) $\int e^{ax} dx = \frac{1}{a} e^{ax}$
- (39) $\int x e^{ax} dx = \left(\frac{x}{a} - \frac{1}{a^2} \right) e^{ax}$
- (40) $\int x^2 e^{ax} dx = \left(\frac{x^2}{a} - \frac{2x}{a^2} + \frac{2}{a^3} \right) e^{ax}$
- (41) $\int \cos ax dx = \frac{1}{a} \sin ax$
- (42) $\int \sin ax dx = -\frac{1}{a} \cos ax$
- (43) $\int \tan ax dx = -\frac{1}{a} \ln |\cos ax|$
- (44) $\int \frac{1}{\cos x} dx = \ln \left| \frac{1}{\cos x} + \tan x \right| = 2 \tanh^{-1} \left(\tan \frac{x}{2} \right)$
- (45) $\int \frac{1}{\sin x} dx = \ln \left| \tan \frac{x}{2} \right|$
- (46) $\int x \cos ax dx = \frac{1}{a^2} \cos ax + \frac{x}{a} \sin ax$
- (47) $\int x^2 \cos ax dx = \frac{2x \cos ax}{a^2} + \frac{a^2 x^2 - 2}{a^3} \sin ax$
- (48) $\int x \sin ax dx = -\frac{x \cos ax}{a} + \frac{\sin ax}{a^2}$
- (49) $\int x^2 \sin ax dx = \frac{2 - a^2 x^2}{a^3} \cos ax + \frac{2x \sin ax}{a^2}$
- (50) $\int e^{bx} \cos ax dx = \frac{1}{a^2 + b^2} e^{bx} (a \sin ax + b \cos ax)$
- (51) $\int e^{bx} \sin ax dx = \frac{1}{a^2 + b^2} e^{bx} (b \sin ax - a \cos ax)$