



SF1683 Differentialekvationer och transformmetoder, del 1
Tentamen
Måndag den 19 december 2022

Skrivtid: 08:00-12:00

Tillåtna hjälpmedel: inga (förutom det bifogade formelbladet)

Examinator: Mattias Dahl

Tentamen består av sex uppgifter uppdelade i två delar. Del I utgörs av de tre första uppgifterna som testar förmågan att lösa grundläggande problem. Del II utgörs av de tre sista uppgifterna och testar förmågan att lösa mer avancerade problem som även kan vara av teoretisk karaktär och är avsedda främst för högre betyg. Varje uppgift ger maximalt fyra poäng. Bonuspoäng från lappskrivningarna adderas till erhållna poäng på del I upp till maximalt 12 poäng.

Betygsgränserna vid tentamen ges av följande tabell.

Fx	E	D	C	B	A
11	12	14	16	19	21

För full poäng på en uppgift krävs att lösningen är väl presenterad och lätt att följa. Det innebär speciellt att införda beteckningar ska definieras, att den logiska strukturen tydligt beskrivs i ord eller symboler och att resonemangen är väl motiverade och tydligt förklarade. Lösningar som allvarligt brister i dessa avseenden bedöms med högst två poäng.

DEL I – GRUNDLÄGGANDE PROBLEM

1. Lös följande initialvärdesproblem för $y = y(x)$.

(a) $\frac{dy}{dx} + \frac{2y}{x} = \sin x$, $y(\pi) = 1$, (b) $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x} \left(y + \sqrt{y^2 + 3x^2} \right)$, $y(1) = 1$.

Lösningarna får ges på implicit form.

(4 p)

2. Använd metoden med variation av parametrar för att hitta alla lösningar till ekvationen

$$x^2 y'' - xy' + y = 2x$$

för $y = y(x)$, $x > 0$.

(4 p)

3. Följande linjära system av differentialekvationer har koefficienter som beror på en parameter $a \in \mathbb{R}$,

$$\begin{cases} x'(t) = ax(t) + (2a+1)y(t) \\ y'(t) = -x(t) - 2y(t) \end{cases}.$$

Bestäm ett värde på a för vilket systemet har lösningar $(x(t), y(t))$ som är begränsade, men inte går mot noll då $t \rightarrow \infty$. (Det finns precis ett sådant värde.) För detta värde på parametern a , bestäm alla lösningar till systemet.

(4 p)

DEL II – AVANCERADE PROBLEM

4. Bestäm två linjärt oberoende serielösningar vid $x = 0$ till ekvationen

$$(x^2 + 1)y'' + 2xy' - 2y = 0, \quad y = y(x).$$

För detta ska du ange den rekursionsrelation som ger koefficienterna i dessa serier samt beräkna termer till och med ordning 8. Bestäm även konvergensraden för dessa lösningar.

(4 p)

5. Följande autonoma system för $(x, y) = (x(t), y(t))$ har båda en kritisk punkt i origo. Använd linjärisering eller metoden med Lyapunovfunktion för att visa att denna kritiska punkt är asymptotiskt stabil.

$$(a) \quad \begin{cases} x' = -x^3 + 3xy^2 \\ y' = -2x^2y - y^3 \end{cases}, \quad (b) \quad \begin{cases} x' = -8x - 2y + x \sin y \\ y' = -y - 2x - 3xy^2 \end{cases}.$$

(4 p)

6. Denna uppgift gäller existens och entydighet för lösningar $y = y(x)$ till initialvärdesproblemet

$$y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0, \quad (1)$$

där $f(x, y)$ är en kontinuerlig funktion definierad på något område R i xy -planet som innehåller punkten (x_0, y_0) .

- (a) Ge ett exempel på ett initialvärdesproblem som (1) med två olika funktioner som lösningar. Ge en noggrann förklaring varför de funktioner du anger är lösningar.
- (b) Formulera Picards sats som garanterar att problemet (1) har en unik lösning. Var noggrann när du anger villkoren i satsen.
- (c) Beviset av Picards sats använder sig av ett iterationsförfarande för att konstruera en följd av $y = y_n(x)$ av approximativa lösningar, där $y_0(x)$ är konstant. Förklara hur detta går till samt beräkna $y_3(x)$ för systemet (1) då $f(x, y) = x + y$, $(x_0, y_0) = (0, 1)$.

(4 p)

Table of Integrals*

Basic Forms

$$\int x^n dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1} \quad (1)$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln |x| \quad (2)$$

$$\int u dv = uv - \int v du \quad (3)$$

$$\int \frac{1}{ax+b} dx = \frac{1}{a} \ln |ax+b| \quad (4)$$

Integrals of Rational Functions

$$\int \frac{1}{(x+a)^2} dx = -\frac{1}{x+a} \quad (5)$$

$$\int (x+a)^n dx = \frac{(x+a)^{n+1}}{n+1}, n \neq -1 \quad (6)$$

$$\int x(x+a)^n dx = \frac{(x+a)^{n+1}((n+1)x-a)}{(n+1)(n+2)} \quad (7)$$

$$\int \frac{1}{1+x^2} dx = \tan^{-1} x \quad (8)$$

$$\int \frac{1}{a^2+x^2} dx = \frac{1}{a} \tan^{-1} \frac{x}{a} \quad (9)$$

$$\int \frac{x}{a^2+x^2} dx = \frac{1}{2} \ln |a^2+x^2| \quad (10)$$

$$\int \frac{x^2}{a^2+x^2} dx = x - a \tan^{-1} \frac{x}{a} \quad (11)$$

$$\int \frac{x^3}{a^2+x^2} dx = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}a^2 \ln |a^2+x^2| \quad (12)$$

$$\int \frac{1}{ax^2+bx+c} dx = \frac{2}{\sqrt{4ac-b^2}} \tan^{-1} \frac{2ax+b}{\sqrt{4ac-b^2}} \quad (13)$$

$$\int \frac{1}{(x+a)(x+b)} dx = \frac{1}{b-a} \ln \frac{a+x}{b+x}, a \neq b \quad (14)$$

$$\int \frac{x}{(x+a)^2} dx = \frac{a}{a+x} + \ln |a+x| \quad (15)$$

$$\int \frac{x}{ax^2+bx+c} dx = \frac{1}{2a} \ln |ax^2+bx+c| - \frac{b}{a\sqrt{4ac-b^2}} \tan^{-1} \frac{2ax+b}{\sqrt{4ac-b^2}} \quad (16)$$

Integrals with Roots

$$\int \sqrt{x-a} dx = \frac{2}{3} (x-a)^{3/2} \quad (17)$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x \pm a}} dx = 2\sqrt{x \pm a} \quad (18)$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{a-x}} dx = -2\sqrt{a-x} \quad (19)$$

$$\int x\sqrt{x-a} dx = \frac{2}{3}a(x-a)^{3/2} + \frac{2}{5}(x-a)^{5/2} \quad (20)$$

$$\int \sqrt{ax+b} dx = \left(\frac{2b}{3a} + \frac{2x}{3} \right) \sqrt{ax+b} \quad (21)$$

$$\int (ax+b)^{3/2} dx = \frac{2}{5a} (ax+b)^{5/2} \quad (22)$$

$$\int \frac{x}{\sqrt{x \pm a}} dx = \frac{2}{3} (x \mp 2a) \sqrt{x \pm a} \quad (23)$$

$$\int \sqrt{\frac{x}{a-x}} dx = -\sqrt{x(a-x)} - a \tan^{-1} \frac{\sqrt{x(a-x)}}{x-a} \quad (24)$$

$$\int \sqrt{\frac{x}{a+x}} dx = \sqrt{x(a+x)} - a \ln [\sqrt{x} + \sqrt{x+a}] \quad (25)$$

$$\int x\sqrt{ax+b} dx = \frac{2}{15a^2} (-2b^2 + abx + 3a^2x^2) \sqrt{ax+b} \quad (26)$$

$$\int \sqrt{x(ax+b)} dx = \frac{1}{4a^{3/2}} \left[(2ax+b) \sqrt{ax(ax+b)} - b^2 \ln |a\sqrt{x} + \sqrt{a(ax+b)}| \right] \quad (27)$$

$$\int \sqrt{x^3(ax+b)} dx = \left[\frac{b}{12a} - \frac{b^2}{8a^2x} + \frac{x}{3} \right] \sqrt{x^3(ax+b)} + \frac{b^3}{8a^{5/2}} \ln |a\sqrt{x} + \sqrt{a(ax+b)}| \quad (28)$$

$$\int \sqrt{x^2 \pm a^2} dx = \frac{1}{2}x\sqrt{x^2 \pm a^2} \pm \frac{1}{2}a^2 \ln |x + \sqrt{x^2 \pm a^2}| \quad (29)$$

$$\int \sqrt{a^2 - x^2} dx = \frac{1}{2}x\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{1}{2}a^2 \tan^{-1} \frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}} \quad (30)$$

$$\int x\sqrt{x^2 \pm a^2} dx = \frac{1}{3} (x^2 \pm a^2)^{3/2} \quad (31)$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} dx = \ln |x + \sqrt{x^2 \pm a^2}| \quad (32)$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = \sin^{-1} \frac{x}{a} \quad (33)$$

$$\int \frac{x}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} dx = \sqrt{x^2 \pm a^2} \quad (34)$$

$$\int \frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = -\sqrt{a^2 - x^2} \quad (35)$$

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} dx = \frac{1}{2}x\sqrt{x^2 \pm a^2} \mp \frac{1}{2}a^2 \ln |x + \sqrt{x^2 \pm a^2}| \quad (36)$$

$$\int \sqrt{ax^2+bx+c} dx = \frac{b+2ax}{4a} \sqrt{ax^2+bx+c} + \frac{4ac-b^2}{8a^{3/2}} \ln |2ax+b+2\sqrt{a(ax^2+bx+c)}| \quad (37)$$

$$\int x\sqrt{ax^2+bx+c} dx = \frac{1}{48a^{5/2}} \left(2\sqrt{a}\sqrt{ax^2+bx+c} \times (-3b^2+2abx+8a(c+ax^2)) + 3(b^3-4abc) \ln |b+2ax+2\sqrt{a}\sqrt{ax^2+bx+c}| \right) \quad (38)$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{ax^2+bx+c}} dx = \frac{1}{\sqrt{a}} \ln |2ax+b+2\sqrt{a(ax^2+bx+c)}| \quad (39)$$

$$\int \frac{x}{\sqrt{ax^2+bx+c}} dx = \frac{1}{a} \sqrt{ax^2+bx+c} - \frac{b}{2a^{3/2}} \ln |2ax+b+2\sqrt{a(ax^2+bx+c)}| \quad (40)$$

$$\int \frac{dx}{(a^2+x^2)^{3/2}} = \frac{x}{a^2\sqrt{a^2+x^2}} \quad (41)$$

Integrals with Logarithms

$$\int \ln ax dx = x \ln ax - x \quad (42)$$

$$\int \frac{\ln ax}{x} dx = \frac{1}{2} (\ln ax)^2 \quad (43)$$

$$\int \ln(ax+b) dx = \left(x + \frac{b}{a} \right) \ln(ax+b) - x, a \neq 0 \quad (44)$$

$$\int \ln(x^2+a^2) dx = x \ln(x^2+a^2) + 2a \tan^{-1} \frac{x}{a} - 2x \quad (45)$$

$$\int \ln(x^2-a^2) dx = x \ln(x^2-a^2) + a \ln \frac{x+a}{x-a} - 2x \quad (46)$$

$$\int \ln(ax^2+bx+c) dx = \frac{1}{a} \sqrt{4ac-b^2} \tan^{-1} \frac{2ax+b}{\sqrt{4ac-b^2}} - 2x + \left(\frac{b}{2a} + x \right) \ln(ax^2+bx+c) \quad (47)$$

$$\int x \ln(ax+b) dx = \frac{bx}{2a} - \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2} \left(x^2 - \frac{b^2}{a^2} \right) \ln(ax+b) \quad (48)$$

$$\int x \ln(a^2-b^2x^2) dx = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2} \left(x^2 - \frac{a^2}{b^2} \right) \ln(a^2-b^2x^2) \quad (49)$$

Integrals with Exponentials

$$\int e^{ax} dx = \frac{1}{a} e^{ax} \quad (50)$$

$$\int \sqrt{x} e^{ax} dx = \frac{1}{a} \sqrt{x} e^{ax} + \frac{i\sqrt{\pi}}{2a^{3/2}} \operatorname{erf}(i\sqrt{ax}), \text{ where } \operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt \quad (51)$$

$$\int x e^x dx = (x-1)e^x \quad (52)$$

$$\int x e^{ax} dx = \left(\frac{x}{a} - \frac{1}{a^2} \right) e^{ax} \quad (53)$$

$$\int x^2 e^x dx = (x^2 - 2x + 2) e^x \quad (54)$$

$$\int x^2 e^{ax} dx = \left(\frac{x^2}{a} - \frac{2x}{a^2} + \frac{2}{a^3} \right) e^{ax} \quad (55)$$

$$\int x^3 e^x dx = (x^3 - 3x^2 + 6x - 6) e^x \quad (56)$$

$$\int x^n e^{ax} dx = \frac{x^n e^{ax}}{a} - \frac{n}{a} \int x^{n-1} e^{ax} dx \quad (57)$$

$$\int x^n e^{ax} dx = \frac{(-1)^n}{a^{n+1}} \Gamma[1+n, -ax], \text{ where } \Gamma(a, x) = \int_x^\infty t^{a-1} e^{-t} dt \quad (58)$$

$$\int e^{ax^2} dx = -\frac{i\sqrt{\pi}}{2\sqrt{a}} \operatorname{erf}(i\sqrt{a}x) \quad (59)$$

$$\int e^{-ax^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{a}} \operatorname{erf}(x\sqrt{a}) \quad (60)$$

$$\int x e^{-ax^2} dx = -\frac{1}{2a} e^{-ax^2} \quad (61)$$

$$\int x^2 e^{-ax^2} dx = \frac{1}{4} \sqrt{\frac{\pi}{a^3}} \operatorname{erf}(x\sqrt{a}) - \frac{x}{2a} e^{-ax^2} \quad (62)$$

*© 2014. From <http://integral-table.com>, last revised June 14, 2014. This material is provided as is without warranty or representation about the accuracy, correctness or suitability of the material for any purpose, and is licensed under the Creative Commons Attribution-Noncommercial-ShareAlike 3.0 United States License. To view a copy of this license, visit <http://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/3.0/> or send a letter to Creative Commons, 171 Second Street, Suite 300, San Francisco, California, 94105, USA.

Integrals with Trigonometric Functions

$$\int \sin ax dx = -\frac{1}{a} \cos ax \quad (63)$$

$$\int \sin^2 ax dx = \frac{x}{2} - \frac{\sin 2ax}{4a} \quad (64)$$

$$\int \sin^n ax dx = -\frac{1}{a} \cos ax {}_2F_1 \left[\frac{1}{2}, \frac{1-n}{2}, \frac{3}{2}, \cos^2 ax \right] \quad (65)$$

$$\int \sin^3 ax dx = -\frac{3 \cos ax}{4a} + \frac{\cos 3ax}{12a} \quad (66)$$

$$\int \cos ax dx = \frac{1}{a} \sin ax \quad (67)$$

$$\int \cos^2 ax dx = \frac{x}{2} + \frac{\sin 2ax}{4a} \quad (68)$$

$$\int \cos^p ax dx = -\frac{1}{a(1+p)} \cos^{1+p} ax \times {}_2F_1 \left[\frac{1+p}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3+p}{2}, \cos^2 ax \right] \quad (69)$$

$$\int \cos^3 ax dx = \frac{3 \sin ax}{4a} + \frac{\sin 3ax}{12a} \quad (70)$$

$$\int \cos ax \sin bxdx = \frac{\cos[(a-b)x]}{2(a-b)} - \frac{\cos[(a+b)x]}{2(a+b)}, a \neq b \quad (71)$$

$$\int \sin^2 ax \cos bxdx = -\frac{\sin[(2a-b)x]}{4(2a-b)} + \frac{\sin bx}{2b} - \frac{\sin[(2a+b)x]}{4(2a+b)} \quad (72)$$

$$\int \sin^2 x \cos x dx = \frac{1}{3} \sin^3 x \quad (73)$$

$$\int \cos^2 ax \sin bxdx = \frac{\cos[(2a-b)x]}{4(2a-b)} - \frac{\cos bx}{2b} - \frac{\cos[(2a+b)x]}{4(2a+b)} \quad (74)$$

$$\int \cos^2 ax \sin ax dx = -\frac{1}{3a} \cos^3 ax \quad (75)$$

$$\int \sin^2 ax \cos^2 bxdx = \frac{x}{4} - \frac{\sin 2ax}{8a} - \frac{\sin[2(a-b)x]}{16(a-b)} + \frac{\sin 2bx}{8b} - \frac{\sin[2(a+b)x]}{16(a+b)} \quad (76)$$

$$\int \sin^2 ax \cos^2 ax dx = \frac{x}{8} - \frac{\sin 4ax}{32a} \quad (77)$$

$$\int \tan ax dx = -\frac{1}{a} \ln \cos ax \quad (78)$$

$$\int \tan^2 ax dx = -x + \frac{1}{a} \tan ax \quad (79)$$

$$\int \tan^n ax dx = \frac{\tan^{n+1} ax}{a(1+n)} \times {}_2F_1 \left(\frac{n+1}{2}, 1, \frac{n+3}{2}, -\tan^2 ax \right) \quad (80)$$

$$\int \tan^3 ax dx = \frac{1}{a} \ln \cos ax + \frac{1}{2a} \sec^2 ax \quad (81)$$

$$\int \sec x dx = \ln |\sec x + \tan x| = 2 \tanh^{-1} \left(\tan \frac{x}{2} \right) \quad (82)$$

$$\int \sec^2 ax dx = \frac{1}{a} \tan ax \quad (83)$$

$$\int \sec^3 x dx = \frac{1}{2} \sec x \tan x + \frac{1}{2} \ln |\sec x + \tan x| \quad (84)$$

$$\int \sec x \tan x dx = \sec x \quad (85)$$

$$\int \sec^2 x \tan x dx = \frac{1}{2} \sec^2 x \quad (86)$$

$$\int \sec^n x \tan x dx = \frac{1}{n} \sec^n x, n \neq 0 \quad (87)$$

$$\int \csc x dx = \ln \left| \tan \frac{x}{2} \right| = \ln |\csc x - \cot x| + C \quad (88)$$

$$\int \csc^2 ax dx = -\frac{1}{a} \cot ax \quad (89)$$

$$\int \csc^3 x dx = -\frac{1}{2} \cot x \csc x + \frac{1}{2} \ln |\csc x - \cot x| \quad (90)$$

$$\int \csc^n x \cot x dx = -\frac{1}{n} \csc^n x, n \neq 0 \quad (91)$$

$$\int \sec x \csc x dx = \ln |\tan x| \quad (92)$$

Products of Trigonometric Functions and Monomials

$$\int x \cos x dx = \cos x + x \sin x \quad (93)$$

$$\int x \cos ax dx = \frac{1}{a^2} \cos ax + \frac{x}{a} \sin ax \quad (94)$$

$$\int x^2 \cos x dx = 2x \cos x + (x^2 - 2) \sin x \quad (95)$$

$$\int x^2 \cos ax dx = \frac{2x \cos ax}{a^2} + \frac{a^2 x^2 - 2}{a^3} \sin ax \quad (96)$$

$$\int x^n \cos x dx = -\frac{1}{2} (i)^{n+1} [\Gamma(n+1, -ix) + (-1)^n \Gamma(n+1, ix)] \quad (97)$$

$$\int x^n \cos ax dx = \frac{1}{2} (ia)^{1-n} [(-1)^n \Gamma(n+1, -iax) - \Gamma(n+1, iax)] \quad (98)$$

$$\int x \sin x dx = -x \cos x + \sin x \quad (99)$$

$$\int x \sin ax dx = -\frac{x \cos ax}{a} + \frac{\sin ax}{a^2} \quad (100)$$

$$\int x^2 \sin x dx = (2 - x^2) \cos x + 2x \sin x \quad (101)$$

$$\int x^2 \sin ax dx = \frac{2 - a^2 x^2}{a^3} \cos ax + \frac{2x \sin ax}{a^2} \quad (102)$$

$$\int x^n \sin x dx = -\frac{1}{2} (i)^n [\Gamma(n+1, -ix) - (-1)^n \Gamma(n+1, -ix)] \quad (103)$$

Products of Trigonometric Functions and Exponentials

$$\int e^x \sin x dx = \frac{1}{2} e^x (\sin x - \cos x) \quad (104)$$

$$\int e^{bx} \sin ax dx = \frac{1}{a^2 + b^2} e^{bx} (b \sin ax - a \cos ax) \quad (105)$$

$$\int e^x \cos x dx = \frac{1}{2} e^x (\sin x + \cos x) \quad (106)$$

$$\int e^{bx} \cos ax dx = \frac{1}{a^2 + b^2} e^{bx} (a \sin ax + b \cos ax) \quad (107)$$

$$\int x e^x \sin x dx = \frac{1}{2} e^x (\cos x - x \cos x + x \sin x) \quad (108)$$

$$\int x e^x \cos x dx = \frac{1}{2} e^x (x \cos x - \sin x + x \sin x) \quad (109)$$

Integrals of Hyperbolic Functions

$$\int \cosh ax dx = \frac{1}{a} \sinh ax \quad (110)$$

$$\int e^{ax} \cosh bxdx = \begin{cases} \frac{e^{ax}}{a^2 - b^2} [a \cosh bx - b \sinh bx] & a \neq b \\ \frac{e^{2ax}}{4a} + \frac{x}{2} & a = b \end{cases} \quad (111)$$

$$\int \sinh ax dx = \frac{1}{a} \cosh ax \quad (112)$$

$$\int e^{ax} \sinh bxdx = \begin{cases} \frac{e^{ax}}{a^2 - b^2} [-b \cosh bx + a \sinh bx] & a \neq b \\ \frac{e^{2ax}}{4a} - \frac{x}{2} & a = b \end{cases} \quad (113)$$

$$\int e^{ax} \tanh bxdx = \begin{cases} \frac{e^{(a+2b)x}}{(a+2b)} {}_2F_1 \left[1 + \frac{a}{2b}, 1, 2 + \frac{a}{2b}, -e^{2bx} \right] - \frac{1}{a} e^{ax} {}_2F_1 \left[\frac{a}{2b}, 1, 1E, -e^{2bx} \right] & a \neq b \\ \frac{e^{ax} - 2 \tan^{-1}[e^{ax}]}{a} & a = b \end{cases} \quad (114)$$

$$\int \tanh ax dx = \frac{1}{a} \ln \cosh ax \quad (115)$$

$$\int \cos ax \cosh bxdx = \frac{1}{a^2 + b^2} [a \sin ax \cosh bx + b \cos ax \sinh bx] \quad (116)$$

$$\int \cos ax \sinh bxdx = \frac{1}{a^2 + b^2} [b \cos ax \cosh bx + a \sin ax \sinh bx] \quad (117)$$

$$\int \sin ax \cosh bxdx = \frac{1}{a^2 + b^2} [-a \cos ax \cosh bx + b \sin ax \sinh bx] \quad (118)$$

$$\int \sin ax \sinh bxdx = \frac{1}{a^2 + b^2} [b \cosh bx \sin ax - a \cos ax \sinh bx] \quad (119)$$

$$\int \sinh ax \cosh bxdx = \frac{1}{4a} [-2ax + \sinh 2ax] \quad (120)$$

$$\int \sinh ax \cosh bxdx = \frac{1}{b^2 - a^2} [b \cosh bx \sinh ax - a \cosh ax \sinh bx] \quad (121)$$