



SF1681 Linjär algebra, fk
Tentamen
11 april 2023

Skrivtid: 8:00–13:00

Tillåtna hjälpmedel: inga

Examinator: David Rydh

Tentamen består av nio uppgifter som vardera ger maximalt fyra poäng. Del I utgörs av de tre första uppgifterna som testar förmågan att lösa grundläggande problem. Del II utgörs av de två följande uppgifterna och testar begreppsförståelse och kunskap om satser och samband. De fyra sista uppgifterna utgör del III och testar förmågan att lösa mer avancerade problem och är avsedda främst för högre betyg. Bonuspoäng av typ I adderas till erhållna poäng på del I och bonuspoäng av typ II adderas till erhållna poäng på del II. Det går dock inte att få mer än 12 respektive 8 poäng på dessa delar. Betygsgränserna vid tentamen kommer preliminärt att ges av följande tabell där kolumnerna anger poänggräns för respektive del/hela skrivningen.

Del	Poäng	Innehåll	Fx	E	D	C	B	A
I	12	Grundläggande problem	-	-	-	-	-	-
II	8	Begrepp och satser	4	4	4	6	6	6
III	16	Avancerade problem	-	-	-	-	-	-
hela	36		11	12	18	22	26	30

Till exempel krävs för betyg C minst 22 poäng totalt varav 6 poäng på del II.

För full poäng på en uppgift krävs att lösningen är väl presenterad och lätt att följa. Det innebär speciellt att införda beteckningar ska definieras, att den logiska strukturen tydligt beskrivs i ord eller symboler och att resonemangen är väl motiverade och tydligt förklarade. Lösningar som allvarligt brister i dessa avseenden bedöms med högst två poäng.

DEL I – GRUNDLÄGGANDE PROBLEM

1. Låt A vara följande matris med element i kroppen $\mathbb{F}_2 = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} = \{0, 1\}$:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Bestäm det karakteristiska polynomet $p_A(x)$, minimalpolynomet $q_A(x)$ och Jordans normalform till A . (4 p)

2. Låt $z \in \mathbb{C}$ vara ett komplext tal och betrakta matrisen $A = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -1 & z \\ i & 1 + 2iz \end{bmatrix}$. Bestäm alla värden på z för vilka A är Hermitesk och/eller unitär. Beräkna även egenvärdena för A för alla sådana z . (4 p)

3. Ge vektorrummet $\mathbb{C}[x]_{\leq d}$ av komplexa polynom av grad $\leq d$ den inre produkten så att $1, x, x^2, \dots, x^d$ är en ortonormal bas. Låt $L: \mathbb{C}[x]_{\leq 2} \rightarrow \mathbb{C}[x]_{\leq 1}$ vara den linjära avbildningen som ges av $L(p) = p'(x) + ip(0)$. Bestäm en singularvärdesuppdelning för L , dvs ange singularvärden och motsvarande ortonormala baser för $\mathbb{C}[x]_{\leq 2}$ och $\mathbb{C}[x]_{\leq 1}$. (4 p)

DEL II – BEGREPP OCH SATSER

4. (a) Definiera begreppen *stokastisk* vektor och *stokastisk* matris. (1 p)
 (b) Visa att varje stokastisk matris har egenvärdet 1. (1 p)
 (c) Definiera begreppet *reguljär* matris och formulera någon version av Perron–Frobenius sats. (1 p)
 (d) Ge exempel på en reguljär *Hermite*sk stokastisk matris A av storlek 3×3 och bestäm det stationära tillståndet i motsvarande Markov-process. (1 p)
5. (a) Definiera begreppet *minimalpolynom* $q_L(t)$ för en operator $L: V \rightarrow V$. (1 p)
 (b) Låt A vara en $n \times n$ -matris med element i en kropp k och låt S vara delrummet av $n \times n$ -matriser som ges av $S = \{p(A) : p(t) \in k[t]\}$, dvs alla polynom i A med koefficienter i k . Visa att dimensionen av S är lika med graden av minimalpolynomet $q_A(t)$. (2 p)
 (c) Låt $k = \mathbb{R}$ och ge exempel på en matris A sådan att S (under addition och multiplikation av matriser) blir en kropp som är isomorf med $\mathbb{C}$. (1 p)

DEL III – AVANCERADE PROBLEM

6. Betrakta de två Markovprocesserna som ges av matriserna

$$A = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

- (a) Bestäm alla stationära tillstånd till de två Markovprocesserna. (2 p)
 (b) Avgör om de två Markovprocesserna konvergerar oavsett starttillstånd. (2 p)
7. Låt A vara en reell 2×2 -matris med reella egenvärden $a_1 < b_1$. Betrakta rekursionsekvationen
- $$X_n = 2X_{n-1} + 3X_{n-2} \quad \forall n \geq 2, \quad X_0 = I, \quad X_1 = A$$
- där X_n är reella 2×2 -matriser.
- (a) Visa att egenvärdena a_n och b_n för X_n endast beror på a_1 och b_1 och inte på A . (2 p)
 (b) Ge en explicit formel för egenvärdena a_n och b_n då $a_1 = 0$ och $b_1 = 3$. (2 p)
8. Låt A vara en komplex $m \times n$ -matris där alla kolonner har norm 1.
- (a) Visa att $1 \leq \text{rk } A \leq \min\{m, n\}$ och att alla värden i detta intervall är möjliga. (1 p)
 (b) Visa att alla singulärvärden till A ligger i intervallet $[0, \sqrt{n}]$. (2 p)
 (c) För alla m, n , ge exempel där A har ett singulärvärde $\sqrt{n}$. (1 p)
9. Låt $M_{n,n}$ vara vektorrummet av komplexa $n \times n$ -matriser. Låt $L: \bigwedge^2 M_{n,n} \rightarrow M_{n,n}$ vara den linjära avbildningen som uppfyller $L(A \wedge B) = AB - BA$ för $A, B \in M_{n,n}$. Låt $M_{n,n}$ ha den inre produkten som ges av $\langle A|B \rangle = \text{tr}(A^\dagger B)$. Bestäm en ortonormal bas för det ortogonala komplementet $\text{im}(L)^\perp$ av bilden $\text{im}(L)$. (4 p)