



**Lösningsförslag till tentamen
10 januari 2024**

DEL I – GRUNDLÄGGANDE PROBLEM

1. Låt $V = \mathbb{C}[x]$ vara vektorrummet av polynom i en variabel med komplexa koefficienter. Låt för heltal $n \geq 0$ operatoren $L_n: V \rightarrow V$ definieras av

$$L_n(p(x)) = p(x) - \sum_{k=0}^n \frac{p^{(k)}(0)}{k!} x^k,$$

för alla $p(x) \in V$.

- (a) Visa att L_n är linjär för alla $n \geq 0$. (1 p)
- (b) Bestäm baser för kärnan $\ker(L_n)$ och bildrummet $\operatorname{im}(L_n)$ till L . (2 p)
- (c) Avgör om $\ker(L_n) \oplus \operatorname{im}(L_n) = V$ som inre direkt summa. (1 p)

Lösningsförslag.

- (a) För $p(x)$ och $q(x)$ i V har vi

$$\begin{aligned} L_n(p(x) + q(x)) &= (p(x) + q(x)) - \sum_{k=0}^n \frac{p^{(k)}(0) + q^{(k)}(0)}{k!} x^k \\ &= p(x) - \sum_{k=0}^n \frac{p^{(k)}(0)}{k!} x^k + qp(x) - \sum_{k=0}^n \frac{q^{(k)}(0)}{k!} x^k = L_n(p(x)) + L_n(q(x)) \end{aligned}$$

och

$$L_n(ap(x)) = ap(x) - \sum_{k=0}^n \frac{ap^{(k)}(0)}{k!} x^k = aL_n(p(x)).$$

Alltså är L_n linjär.

- (b) Vi har att $L_n(x^m) = x^m - x^m = 0$ om $m \leq n$ och $L_n(x^m) = x^m$ om $m > n$. Alltså är $\{1, x, \dots, x^n\}$ en bas för kärnan och $\{x^{n+1}, x^{n+2}, \dots\}$ en bas för bildrummet.
- (c) Unionen av baserna för kärna och bildrum ger basen för V . Skärningen av kärnan och bildrummet är $\{0\}$. Alltså är $V = \ker L \oplus \operatorname{im} L$ som en inre direkt summa.

Svar.

- (b) $\{1, x, \dots, x^n\}$ en bas för $\ker(L_n)$ och $\{x^{n+1}, x^{n+2}, \dots\}$ är en bas för $\operatorname{im}(L_n)$.
- (c) $\ker(L_n) \oplus \operatorname{im}(L_n) = V$ som en inre direkt summa.

2. Låt $V = \mathbb{C}[x]$ vara inre-produktrummet som består av polynom med komplexa koefficienter med inre produkten definierad som

$$\langle p(x)|q(x) \rangle = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \overline{p(x)} q(x) dx$$

för $p(x), q(x)$ i V . Låt $V_n = \text{Span}\{1, x, \dots, x^n\}$ för heltal $n \geq 0$.

- (a) Bestäm en ortogonal bas för V_3 . (2 p)
 (b) Bestäm den ortogonala projektionen av x^k på V_2 för alla $k \geq 0$. (2 p)

Lösningsförslag.

- (a) Eftersom intervallet är symmetriskt kring 0 kommer udda och jämna potenser av x att vara ortogonala mot varandra. Det räcker därför att ersätta x^2 med

$$x^2 - \frac{\langle 1|x^2 \rangle}{\langle 1|1 \rangle} = x^2 - \frac{1/3}{1} = x^2 - \frac{1}{3}$$

och x^3 med

$$x^3 - \frac{\langle x|x^3 \rangle}{\langle x|x \rangle} x = x^3 - \frac{1/5}{1/3} x = x^3 - \frac{3}{5} x$$

Alltså är $\{1, x, x^2 - 1/3, x^3 - 3/5x\}$ en ortogonal bas för V_3 .

- (b) Vi kan använda den ortogonala basen för V_2 för att beräkna projektionen. Vi har att projektionen av $x^k = x^{2m}$ på V_2 ges av

$$\begin{aligned} & \frac{\langle 1|x^{2m} \rangle}{\langle 1|1 \rangle} + \frac{\langle x^2 - 1/3|x^{2m} \rangle}{\langle x^2 - 1/3|x^2 - 1/3 \rangle} \left(x^2 - \frac{1}{3} \right) \\ &= \frac{1}{2m+1} + \frac{1/(2m+3) - 1/(3(2m+1))}{1/5 - 2/9 + 1/9} \left(x^2 - \frac{1}{3} \right) \\ &= \frac{15m}{(2m+1)(2m+3)} x^2 - \frac{3(m-1)}{(2m+1)(2m+3)} \end{aligned}$$

och projektionen av $x^k = x^{2m+1}$ ges av

$$\frac{\langle x|x^{2m+1} \rangle}{\langle x|x \rangle} x = \frac{3}{2m+3} x.$$

Svar.

- (a) $\{1, x, x^2 - 1/3, x^3 - 3/5x\}$ en ortogonal bas för V_3 .
 (b) Projektionen av x^k på V_2 ges av $\frac{15k}{2(k+1)(k+3)} x^2 + \frac{3(2-k)}{(k+1)(k+3)}$ om k är jämnt och av $\frac{3}{k+2} x$ om k är udda.

3. Låt $\mathbb{F}_5 = \{0, \pm 1, \pm 2\}$ vara kroppen med fem element. Välj en matris A i $M_{2,2}(\mathbb{F}_5)$ sådan att $K = \{aI + bA : a, b \in \mathbb{F}_5\}$ bildar en kropp med 25 element och bestäm alla lösningarna till ekvationen $x^3 = 1$ i K . **(4 p)**

Lösningsförslag. Vi kan se att ekvationen $x^3 = 1$ kan skrivas som $(x - 1)(x^2 + x + 1) = 0$. Det finns bara en lösning i $\mathbb{F}_5$, så faktorn $x^2 + x + 1$ är irreducibel över k . Vi kan välja matrisen

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

som har karaktäristiskt polynom $p_A(x) = x^2 - \text{tr}(A)x + \det(A) = x^2 + x + 1$. Alltså kommer $K = \{aI + bA : a, b \in \mathbb{F}_5\}$ att vara en kropp enligt sats ur kursmaterialet om kroppar. Enligt Cayley-Hamiltons sats har vi nu att $p_A(A) = 0$. Den andra lösningen ges av A^{-1} eftersom konstanttermen i $p_A(x)$ är 1. Genom att multiplicera A^{-1} med $A^2 + A + I = 0$ får vi att $A^{-1} = -I - A$. Lösningarna till ekvationen $x^3 = 1$ är därmed $x_1 = I$, $x_2 = A$ och $x_3 = -I - A$.

Svar. Ett exempel är $A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ och lösningarna till $x^3 = 1$ ges av I , A och $-I - A$, dvs

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{och} \quad \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Det finns 21 lösningar bland alla 2×2 -matriser över $\mathbb{F}_5$.

$$\left\{ \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}, \right. \\ \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \\ \left. \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right\}$$

DEL II – BEGREPP OCH SATSER

4. (a) Definera vad som menas med en *adjungerad* linjär avbildning. (1 p)
(b) Visa att $\ker L^\dagger = (\operatorname{im} L)^\perp$ om $L: V \longrightarrow W$ är en linjär avbildning mellan inre produktrum. (2 p)
(c) Ge ett exempel som visar att det inte alltid gäller att $U \oplus U^\perp = V$ om U är ett delrum av ett inre produktrum V . (1 p)

Lösningsförslag.

- (a) Avbildningen $L^\dagger: W \longrightarrow V$ är den adjungerade linjära avbildningen till $L: V \longrightarrow W$ om

$$\langle \mathbf{x} | L^\dagger(\mathbf{y}) \rangle = \langle L(\mathbf{x}) | \mathbf{y} \rangle$$

för alla $\mathbf{x}$ i V och alla $\mathbf{y}$ i W .

- (b) Vi har att

$$\begin{aligned} \ker L^\dagger &= \{\mathbf{y} \in W : L^\dagger(\mathbf{y}) = 0\} = \{\mathbf{y} \in W : \langle \mathbf{x} | L^\dagger(\mathbf{y}) \rangle = 0 \forall \mathbf{x} \in V\} \\ &= \{\mathbf{y} \in W : \langle L(\mathbf{x}) | \mathbf{y} \rangle = 0 \forall \mathbf{x} \in V\} = (\operatorname{im} L)^\perp \end{aligned}$$

- (c) Vi kan välja $V = \mathbb{C}[x]$ med inre produkt där $\{1, x, x^2, \dots\}$ utgör en ON-bas och $U = \operatorname{span}\{x - 1, x(x - 1), x^2(x - 1), \dots\}$. Ett nollskilt polynom $p(x)$ i $U^\perp$ måste ha alla koefficienter lika, men då är det en potensserie och inte ett polynom.

5. (a) Definiera vad som menas med *egenvektor* och *generaliserad egenvektor* till en linjär operator. (1 p)
- (b) Ge exempel på en linjär operator med en generaliserad egenvektor som inte är en egenvektor. (1 p)
- (c) Formulera satsen om Jordans normalform i fallet då operatoren är nilpotent. (1 p)
- (d) Bestäm vilka värden som är möjliga för rangen av en 5×5 -matris N som uppfyller att $N^2 = 0$. (1 p)

Lösningsförslag.

- (a) En *egenvektor* är en vektor $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ som uppfyller $L(\mathbf{x}) = \lambda \mathbf{x}$ för någon skalär λ . En *generaliserad egenvektor* är en vektor $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ som uppfyller att $(L - \lambda I)^n(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$ för någon skalär λ och något heltal $n \geq 1$.
- (b) Operatoren $L: k^2 \rightarrow k^2$ som ges av matrisen $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ har ett egenvärde 0 med egenvektorer $\begin{bmatrix} t \\ 0 \end{bmatrix}$, $t \neq 0$. Alla vektorer med nollskild andra koordinat är generaliserade egenvektorer, men inte egenvektorer.
- (c) För en nilpotent operator L finns en bas B så att matrisen för L blir blockdiagonal med block på formen

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

Storleken på blocken är unikt bestämd av operatoren, men inte ordningen.

- (d) Eftersom $N^2 = 0$ kan inte finnas några block av storlek 3 eller större. Vi kan skriva $5 = 2 + 2 + 1 = 2 + 1 + 1 + 1 = 1 + 1 + 1 + 1 + 1$ och får att rangen är lika med antalet block av storlek 2. Den kan alltså vara 0, 1 eller 2.

DEL III – AVANCERADE PROBLEM

6. Låt $V = \mathbb{C}^3$ och låt $L: V \rightarrow V$ ges av $L(x_1, x_2, x_3) = (x_3, x_1, x_2)$.
- (a) Visa att detta ger en linjär avbildning $L \otimes L: V \otimes V \rightarrow V \otimes V$. (1 p)
- (b) Bestäm egenvärden och egenrum för $L \otimes L$. (3 p)

Lösningsförslag.

- (a) Vi får en bilinjär avbildning $V \times V \rightarrow V \otimes V$ genom $(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \mapsto L(\mathbf{x}_1) \otimes L(\mathbf{x}_2)$. Den universella egenskapen ger nu att vi får en linjär avbildning $L \otimes L: V \otimes V \rightarrow V \otimes V$.
- (b) Eftersom $L^3 = I$ har vi att minimalpolynomet är $q_L(x) = x^3 - 1$ och L har tre distinkta egenvärden, $1, \xi, \xi^2$, där $\xi = (-1 + i\sqrt{3})/2$. Motsvarande egenvektorer är

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ \xi^2 \\ \xi \end{bmatrix}, \quad \text{och} \quad \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ \xi \\ \xi^2 \end{bmatrix},$$

Tensorprodukterna av egenvektorerna kommer att vara egenvektorer för $L \otimes L$. Vi får på detta sätt nio egenvektorer

$$\mathbf{v}_1 \otimes \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_1 \otimes \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_1 \otimes \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_2 \otimes \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \otimes \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3 \otimes \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_3 \otimes \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_3 \otimes \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3 \otimes \mathbf{v}_3,$$

Egenvärdena är produkter av egenvärdena för L . Alltså får vi

$$E_1 = \text{span}\{\mathbf{v}_1 \otimes \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \otimes \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_3 \otimes \mathbf{v}_2\},$$

$$E_\xi = \text{span}\{\mathbf{v}_1 \otimes \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_3 \otimes \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \otimes \mathbf{v}_2\}$$

och

$$E_{\xi^2} = \text{span}\{\mathbf{v}_1 \otimes \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_2 \otimes \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_3 \otimes \mathbf{v}_3\}$$

Svar. Egenvärdena är $1, \xi = (-1 + i\sqrt{3})/2$ och $\xi^2 = (-1 - i\sqrt{3})/2$ och egenrummen är

$$E_1 = \text{Span} \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ \xi^2 \\ \xi \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 1 \\ \xi \\ \xi^2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ \xi \\ \xi^2 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 1 \\ \xi^2 \\ \xi \end{bmatrix} \right\}$$

$$E_\xi = \text{Span} \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 1 \\ \xi^2 \\ \xi \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ \xi^2 \\ \xi \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ \xi \\ \xi^2 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 1 \\ \xi \\ \xi^2 \end{bmatrix} \right\}$$

$$E_{\xi^2} = \text{Span} \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 1 \\ \xi \\ \xi^2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ \xi \\ \xi^2 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ \xi^2 \\ \xi \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 1 \\ \xi^2 \\ \xi \end{bmatrix} \right\}$$

7. Bestäm en Hermitesk matris A_θ som uppfyller

$$\exp(iA_\theta) = \begin{bmatrix} i \sin \theta & \cos \theta \\ \cos \theta & i \sin \theta \end{bmatrix},$$

där θ är ett reellt tal.

(4 p)

Lösningsförslag. Egenvärdena till

$$B_\theta = \begin{bmatrix} i \sin \theta & \cos \theta \\ \cos \theta & i \sin \theta \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3i & 4 \\ 4 & 3i \end{bmatrix}$$

är $\lambda_1 = \cos \theta + i \sin \theta$ och $\lambda_2 = -\cos \theta + i \sin \theta$ och motsvarande normerade egenvektorer är

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{och} \quad \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Den unitära matrisen

$$Q = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

ger att

$$Q^T B_\theta Q = \begin{bmatrix} \cos \theta + i \sin \theta & 0 \\ 0 & -\cos \theta + i \sin \theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{i\theta} & 0 \\ 0 & e^{i\pi - i\theta} \end{bmatrix} = \exp \left(i \begin{bmatrix} \theta & 0 \\ 0 & \pi - \theta \end{bmatrix} \right).$$

Alltså får vi att

$$B_\theta = Q \exp \left(i \begin{bmatrix} \theta & 0 \\ 0 & \pi - \theta \end{bmatrix} \right) Q^T = \exp \left(i Q \begin{bmatrix} \theta & 0 \\ 0 & \pi - \theta \end{bmatrix} Q^T \right)$$

och

$$\begin{aligned} A_\theta &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta & 0 \\ 0 & \pi - \theta \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \theta & \pi - \theta \\ \theta & \theta - \pi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \pi & 2\theta - \pi \\ 2\theta - \pi & \pi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \pi/2 & \theta - \pi/2 \\ \theta - \pi/2 & \pi/2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Svar. $A_\theta = \begin{bmatrix} \pi/2 & \theta - \pi/2 \\ \theta - \pi/2 & \pi/2 \end{bmatrix}$

8. Låt V vara ett ändligdimensionellt vektorrum över en kropp k och låt $W \subseteq V \otimes V$ vara det linjära höljet till $S = \{\mathbf{x} \otimes \mathbf{x} : \mathbf{x} \in V\}$. Visa att $(V \otimes V)/W$ är isomorft med $\bigwedge^2 V$.

(4 p)

Lösningsförslag. Enligt isomorfisatsen räcker det att hitta en surjektiv linjär avbildning $L: V \otimes V \longrightarrow \bigwedge^2 V$ där $W = \ker L$. Vi kan definiera L genom att först ta den bilinjära avbildningen $\Phi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{x} \wedge \mathbf{y}$ som genom den universella egenskapen hos tensorprodukten ger en linjär avbildning $L: V \otimes V \longrightarrow \bigwedge^2 V$. Den är surjektiv eftersom $\{\mathbf{x}_i \wedge \mathbf{x}_j\}$ spänner upp $\bigwedge^2 V$ om $\{\mathbf{x}_i\}$ är en bas för V . Om $\sum a_{ij} \mathbf{x}_i \otimes \mathbf{x}_j$ ligger i $\ker L$ måste $a_{ij} - a_{ji} = 0$, för alla i, j . Om vi drar bort $\sum a_{ij} (\mathbf{x}_i + \mathbf{x}_j) \otimes (\mathbf{x}_i + \mathbf{x}_j)$ får vi en linjärkombination av $\mathbf{x}_i \otimes \mathbf{x}_i$. Alltså är $\ker(L) \subseteq W$. Å andra sidan är $L(\mathbf{x} \otimes \mathbf{x}) = \mathbf{x} \wedge \mathbf{x} = 0$, så $W \subseteq \ker(L)$.

9. För två kommuterande kvadratiska matriser A och B låt

$$V_{A,B} = \text{Span}\{A^i B^j, \quad i, j \geq 0\}.$$

Bestäm det största och det minsta möjliga värdet för $\dim V_{A,B}$ då A och B är kommuterande matriser i $M_{2,2}(\mathbb{C})$. **(4 p)**

Lösningsförslag. Eftersom $A^0 B^0 = I$ är $\dim V_{A,B} \geq 1$ och $\dim V_{I,I} = \dim \text{span}\{I\} = 1$. Alltså är 1 det minsta möjliga värdet för $\dim V_{A,B}$.

Vi kan anta att A är på Jordanform och det finns tre möjligheter.

$$A = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}, \quad \text{eller} \quad A = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix},$$

där $\lambda \neq \mu$. Om $AB = BA$ och $B = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ får vi i det första fallet att

$$\begin{bmatrix} \lambda a & \lambda b \\ \mu c & \mu d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda a & \mu b \\ \lambda c & \mu d \end{bmatrix}$$

vilket ger $b = c = 0$ eftersom $\lambda \neq \mu$. Därmed kommer $V_{A,B}$ bestå av endast diagonalmatriser som ger dimension högst 2. Dimensionen blir precis 2 eftersom A och $A^0 = I$ är linjärt oberoende.

I det andra fallet ger $AB = BA$ att

$$\begin{bmatrix} \lambda a + c & \lambda b + d \\ \lambda c & \lambda d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda a & a + \lambda b \\ \lambda c & c + \lambda d \end{bmatrix}$$

vilket ger $c = 0$ och $a = d$. Därmed kommer

$$V_{A,B} = \left\{ \begin{bmatrix} x & y \\ 0 & x \end{bmatrix}, x, y \in \mathbb{C} \right\}.$$

som har dimension 2. I det sista fallet kommer $V_{A,B} = V_{I,B}$ som har dimension 2 om B inte är en multipel av I . Därmed är 2 det största möjliga värdet för $\dim V_{A,B}$.

Svar. Det minsta värdet är 1 och det största värdet är 2.