



**Lösningsförslag till tentamen
12 januari 2022**

DEL I – GRUNDLÄGGANDE PROBLEM

1. Låt $\ell^2(\mathbb{C})$ vara Hilbertrummet av följder $\mathbf{a} = (a_0, a_1, \dots)$ med $|\mathbf{a}|^2 = \sum_{i=0}^{\infty} |a_i|^2 < \infty$ och den inre produkten $\langle \mathbf{a} | \mathbf{b} \rangle = \sum_{i=0}^{\infty} \overline{a_i} b_i$. Låt $c \in \mathbb{C}$ vara ett komplext tal med $|c| \leq 1$ och låt $L_c: \ell^2(\mathbb{C}) \rightarrow \ell^2(\mathbb{C})$ vara operatoren som tar följden $\mathbf{a} = (a_0, a_1, \dots)$ på följden $L_c(\mathbf{a}) = (a_0, ca_1, c^2a_2, c^3a_3, \dots)$.
- (a) Bestäm den adjungerade operatoren $L_c^\dagger$. (2 p)
- (b) För vilka $c \in \mathbb{C}$ är L_c självdjunge rad och/eller unitär? (2 p)

Lösning s fö rslag. Vi har att

$$\langle L_c(\mathbf{a}) | \mathbf{b} \rangle = \sum_{i=0}^{\infty} \overline{c^i a_i} b_i = \sum_{i=0}^{\infty} \overline{a_i} (\overline{c^i} b_i) = \langle \mathbf{a} | L_{\overline{c}}(\mathbf{b}) \rangle.$$

Därmed är $L_c^\dagger = L_{\overline{c}}$. Vi ser att $L_c = L_d$ precis när $c = d$ eftersom $L_c(\mathbf{e}_1) = c\mathbf{e}_1$. Alltså är L_c självdjunge rad precis när $\overline{c} = c$, dvs precis när $c \in \mathbb{R}$. Vidare är $L_c^{-1} = L_{c^{-1}}$ så L_c är unitär precis när $\overline{c} = c^{-1}$, dvs när $|c| = 1$.

Svar.

- (a) $L_c^\dagger = L_{\overline{c}}$.
- (b) L_c är självdjunge rad när $c \in \mathbb{R}$ och unitär när $|c| = 1$.

2. Låt $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 4 & 4 \end{bmatrix}$. Bestäm Jordans normalform till A och beräkna A^{2022} . (4 p)

Lösningsförslag. Det karakteristiska polynomet till A är $p_A(t) = t^2 - 4t + 4 = (t - 2)^2$ så A har ett egetvärde $\lambda = 2$ med algebraisk multiplicitet 2. Eftersom $A \neq 2I$ så är den geometriska multipliciteten 1. Detta ger Jordans normalform

$$A \sim \Lambda := \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Detta betyder att $A = P\Lambda P^{-1}$ för en lämplig basbytesmatris P och att $A^{2022} = P\Lambda^{2022}P^{-1}$. Vi behöver dock inte beräkna P utan kan använda att $N = \Lambda - 2I$ är nilpotent. Därmed är även

$$B := PNP^{-1} = A - 2I = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$$

nilpotent, nämligen $B^2 = 0$. Binomialsatsen för kommuterande matriser ger alltså att:

$$\begin{aligned} A^{2022} &= (2I + B)^{2022} = 2^{2022}I + 2022 \cdot 2^{2021}B = 2^{2022}(I + 1011B) \\ &= 2^{2022} \begin{bmatrix} -2021 & -1011 \\ 4044 & 2023 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Alternativt kan vi först beräkna P , dvs bestämma en Jordanbas $\mathcal{B}$. Egenrummet till $\lambda = 2$ spänns upp av $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$. För att utöka $\mathbf{v}_1$ till en Jordanbas behöver vi en vektor $\mathbf{v}_2$ som uppfyller att $A\mathbf{v}_2 = 2\mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_1$. Vi kan till exempel välja $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}$. Med $\mathcal{B} = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ har vi basbytesmatriserna (observera att $P = P^{-1}$ men detta är en slump):

$$P := P_{\mathcal{E}, \mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{och} \quad P^{-1} = P_{\mathcal{B}, \mathcal{E}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}.$$

Vi beräknar som ovan Λ^{2022} genom att dela upp

$$\Lambda = \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}}_{2I} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}_N$$

och noterar att $N^2 = 0$ och att $2I$ och N kommuterar. Detta ger

$$\begin{aligned} \Lambda^{2022} &= \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}^{2022} = (2I + N)^{2022} = 2^{2022}I + 2022 \cdot 2^{2021}N \\ &= 2^{2022}(I + 1011N) = 2^{2022} \begin{bmatrix} 1 & 1011 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

och slutligen att

$$\begin{aligned} A^{2022} &= P\Lambda^{2022}P^{-1} = 2^{2022} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1011 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} \\ &= 2^{2022} \begin{bmatrix} -2021 & -1011 \\ 4044 & 2023 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Svar. $A^{2022} = 2^{2022} \begin{bmatrix} -2021 & -1011 \\ 4044 & 2023 \end{bmatrix}.$

3. Låt $K = \{a + b\sqrt{2} : a, b \in \mathbb{Q}\} \subset \mathbb{R}$. Detta är en kropp.

- (a) Avgör om matrisen $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$ är diagonaliserbar över kroppen K . **(2 p)**
- (b) Bestäm en 2×2 -matris $B \in M_2(\mathbb{Q})$ och en isomorfi av kroppar $\varphi: K \longrightarrow \text{Span}\{I, B\}$, dvs en isomorfi av $\mathbb{Q}$ -vektorrum som tar multiplikation i K till multiplikation av matriser. **(2 p)**

Lösningsförslag.

- (a) Det karakteristiska polynomet är $p_A(t) = (t - 1)(t - 5) + 6 = t^2 - 6t + 11$ vilket har de komplexa rötterna $\lambda = 3 \pm \sqrt{2}i$. Eftersom egenvärdena inte är reella så ligger de inte heller i K . Alltså saknar matrisen egenvärden över K och är därmed inte diagonaliserbar över K .
- (b) En möjlighet är att välja isomorfin som tar basen $\{1, \sqrt{2}\}$ på basen $\{I, B\}$ för en lämplig matris B . Då behöver vi att $B^2 = 2I$, dvs vi ska välja en 2×2 -matris B med minimalpolynom $q_B(x) = x^2 - 2$. Notera att $x^2 - 2$ är irreducibelt över $\mathbb{Q}$ så $\text{Span}\{I, B\}$ blir en kropp. Eftersom vi har en 2×2 -matris är minimalpolynomet lika med det karakteristiska polynomet så $\text{tr}(B) = 0$ och $\det(B) = -2$. Detta uppfylls till exempel av

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Svar.

- (a) Matrisen är inte diagonaliserbar över K .
- (b) Till exempel $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$.

DEL II – BEGREPP OCH SATSER

4. Låt V vara ett vektorrum och $L: V \rightarrow V$ en operator.
- (a) Definiera vad som menas med minimalpolynomet $q_L(t)$ för L . **(1 p)**
 - (b) Visa att minimalpolynomet existerar om $\dim V = n < \infty$ och har grad $\leq n^2$. **(1 p)**
 - (c) Ge ett exempel på en operator L på ett ändligt dimensionellt vektorrum V sådan att minimalpolynomet $q_L(t)$ inte är lika med det karakteristiska polynomet $p_L(t)$. **(1 p)**
 - (d) Ge ett exempel på en operator L sådan att $q_L(t)$ inte existerar. **(1 p)**

Lösningsförslag.

- (a) Minimalpolynomet är ett moniskt polynom $q_L(t)$ av minimal grad sådant att $q_L(L) = 0$. (Om det existerar är det unikt.)
- (b) Eftersom vektorrummet $\text{End}(V) = \text{Lin}(V, V) \simeq V^\vee \otimes V$ har dimension n^2 så är $I, L, L^2, \dots, L^{n^2}$ linjärt beroende. Vi kan alltså hitta något $d \leq n^2$ och skalärer $a_0, a_1, \dots, a_{d-1}$ så att $L^d = a_{d-1}L^{d-1} + \dots + a_1L + a_0I$, dvs $f(L) = 0$ för $f(t) = t^d - a_{d-1}t^{d-1} - \dots - a_1t - a_0$ och minimalpolynomet har alltså grad $\leq d \leq n^2$. Alternativt säger Cayley–Hamilton's sats att $p_L(L) = 0$ där $p_L(t)$ är det karakteristiska polynomet vilket har grad n . Alltså existerar minimalpolynomet och har grad $\leq n \leq n^2$.
- (c) Vi kan ta $V = \mathbb{C}^2$ och $L = 0$. Då är $p_L(t) = t^2$ medan $q_L(t) = t$.
- (d) Ett exempel är shift-operatorn $L: \ell^2(\mathbb{C}) \rightarrow \ell^2(\mathbb{C})$. Ty $L^n(e_0) = e_n$ och $e_0, e_1, e_2, \dots$ är linjärt oberoende. Ett annat exempel är deriveringsoperatorn $L = D$ på vektorrummet $V = \text{Span}\{e^{ikt} : k \in \mathbb{Z}\}$ av trigonometriska polynom med komplexa koefficienter. Då har vi oändligt många egenvärden $0, \pm i, \pm 2i, \dots$ och eftersom $q_L(\lambda) = 0$ för varje egenvärde λ så existerar inte q_L (eftersom ett nollskilt polynom bara har ett ändligt antal nollställen).

5. (a) Vad innebär det att en $n \times n$ -matris A är unitär? **(1 p)**
- (b) Vad innebär en *singulärvärdesuppdelning* (en: *singular value decomposition*) av en linjär avbildning $L: V \rightarrow W$ mellan ändligt dimensionella inre produktrum V och W ? Definiera även begreppen *singulärvärde* och *singulärvektor*. **(1 p)**
- (c) Visa att en $n \times n$ -matris A är unitär om och endast om A har n stycken singulärvärden som alla är 1. **(2 p)**

Lösningsförslag.

- (a) En matris A är unitär om $A^{-1} = A^\dagger$.
- (b) En singulärvärdesuppdelning innebär att välja ortonormala baser $\mathcal{B} = \{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n\}$ för V och $\mathcal{D} = \{\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \dots, \mathbf{y}_m\}$ för W så att matrisen Σ för L i dessa baser blir:

$$\Sigma = [L]_{\mathcal{D}, \mathcal{B}} = \begin{bmatrix} D & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

där $D = \text{diag}(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_r)$ är en positiv reell diagonalmatris. Elementen σ_i kallas *singulärvärden* och vektorerna $\mathbf{x}_i$ och $\mathbf{y}_i$ kallas *singulärvektorer*. Notera att $L(\mathbf{x}_i) = \sigma_i \mathbf{y}_i$ och $L^\dagger(\mathbf{y}_i) = \sigma_i \mathbf{x}_i$ för alla $1 \leq i \leq r$ är en konsekvens av detta. Vidare är $r = \text{rk } D = \text{rk } L$.

- (c) De noll-skilda egenvärdena (räknade med multiplicitet) till $A^\dagger A$ är precis singulärvärdena i kvadrat. Eftersom singulärvärdena är reella och positiva så är A alltså n stycken singulärvärden som alla är 1 precis när $A^\dagger A$ enbart har egenvärdet 1 (med multiplicitet n). Eftersom $A^\dagger A$ är Hermiteisk och därmed diagonaliserbar inträffar detta precis när $A^\dagger A = I$, dvs precis då A är unitär.

DEL III – AVANCERADE PROBLEM

6. En följd av polynom $p_0(t), p_1(t), \dots$ definieras rekursivt av

$$p_0(t) = 4t - 1, \quad p_1(t) = 4t^2 + 1, \quad \text{och} \quad p_{n+1}(t) = 2p_n(t) + 3p_{n-1}(t) \text{ för } n \geq 1.$$

Bestäm en explicit formel för $p_n(t)$.

(4 p)

Lösningförslag. Rekursionen kan ses som ett system av 3 rekursioner: en för konstant-termerna, en för t -termerna och en för t^2 -termerna. Det räcker därför att bestämma en formel för rekursionen $x_{n+1} = 2x_n + 3x_{n-1}$ där följden består av tal $x_0, x_1, \dots$ med olika initialvärden. Denna kan lösas genom att skriva den på matrisform som:

$$\mathbf{y}_{n+1} = \begin{bmatrix} x_{n+1} \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_n \\ x_{n-1} \end{bmatrix} = A\mathbf{y}_n.$$

Matrisen A har egenvärdena $\lambda_1 = -1$ och $\lambda_2 = 3$ med motsvarande egenvektorer $\xi_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ och $\xi_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$. Eftersom matrisen är diagonaliserbar kan vi skriva $\mathbf{y}_1 = a_1\xi_1 + a_2\xi_2$ för några reella tal $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$. Då blir $\mathbf{y}_{n+1} = a_1\lambda_1^n\xi_1 + a_2\lambda_2^n\xi_2$ och speciellt (andra koordinaten):

$$x_n = -a_1\lambda_1^n + a_2\lambda_2^n = -a_1(-1)^n + a_23^n$$

för alla $n \geq 0$.

- För konstanttermerna har vi att $\mathbf{y}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \xi_1$ vilket ger $a_1 = 1, a_2 = 0$ och $x_n = -(-1)^n$.
- För t -termerna har vi att $\mathbf{y}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \end{bmatrix} = -3\xi_1 + \xi_2$ vilket ger $a_1 = -3, a_2 = 1$ och $x_n = 3(-1)^n + 3^n$.
- För t^2 -termerna har vi att $\mathbf{y}_1 = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix} = \xi_1 + \xi_2$ vilket ger $a_1 = 1, a_2 = 1$ och $x_n = -(-1)^n + 3^n$.

Sammanlagt ger detta oss:

$$p_n(t) = (-1)^n(-t^2 + 3t - 1) + 3^n(t^2 + t).$$

Alternativt kan man istället direkt dra slutsatsen från egenvärdena att

$$p_n(t) = (-1)^n q(t) + 3^n r(t)$$

för några polynom $q(t)$ och $r(t)$ av grad 2 och bestämma $q(t)$ och $r(t)$ genom att sätta in $n = 0$ och $n = 1$ vilket ger

$$4t - 1 = q(t) + r(t)$$

$$4t^2 + 1 = -q(t) + 3r(t)$$

Vilket ger $q(t) = -t^2 + 3t - 1$ och $r(t) = t^2 + t$.

Svar.

$$\begin{aligned} p_n(t) &= (-1)^n(-t^2 + 3t - 1) + 3^n(t^2 + t) \\ &= (3^n - (-1)^n)t^2 + (3^n + 3(-1)^n)t - (-1)^n \end{aligned}$$

7. Låt V vara ett komplext vektorrum och definiera en avbildning $f: V \times V \rightarrow V \otimes V$ genom $f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{x} \otimes \mathbf{y} - \mathbf{y} \otimes \mathbf{x}$. Visa att det finns en unik operator L på $V \otimes V$ sådan att $L(\mathbf{x} \otimes \mathbf{y}) = f(\mathbf{x}, \mathbf{y})$. Visa att $V \otimes V = \text{im } L \oplus \ker L$ är en inre direkt summa. **(4 p)**

Svar. Avbildningen f är bilinjär, dvs:

$$\begin{aligned} f(a_1 \mathbf{x}_1 + a_2 \mathbf{x}_2, \mathbf{y}) &= (a_1 \mathbf{x}_1 + a_2 \mathbf{x}_2) \otimes \mathbf{y} - \mathbf{y} \otimes (a_1 \mathbf{x}_1 + a_2 \mathbf{x}_2) \\ &= a_1(\mathbf{x}_1 \otimes \mathbf{y}) + a_2(\mathbf{x}_2 \otimes \mathbf{y}) - a_1(\mathbf{y} \otimes \mathbf{x}_1) - a_2(\mathbf{y} \otimes \mathbf{x}_2) \\ &= a_1 f(\mathbf{x}_1, \mathbf{y}) + a_2 f(\mathbf{x}_2, \mathbf{y}) \\ f(\mathbf{x}, a_1 \mathbf{y}_1 + a_2 \mathbf{y}_2) &= \dots = a_1 f(\mathbf{x}, \mathbf{y}_1) + a_2 f(\mathbf{x}, \mathbf{y}_2) \end{aligned}$$

för alla $\mathbf{x}, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{y}, \mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2 \in V$ och $a_1, a_2 \in \mathbb{C}$. Den universella egenskapen för tensorprodukten ger alltså en unik operator L på $V \otimes V$ sådan att $L(\mathbf{x} \otimes \mathbf{y}) = \mathbf{x} \otimes \mathbf{y} - \mathbf{y} \otimes \mathbf{x}$.

För att visa att $V \otimes V$ är en inre direkt summa måste vi visa (a) att varje vektor i $V \otimes V$ går att skriva som en summa av en vektor i $\ker L$ och en vektor i $\text{im } L$, och (b) att $\text{im } L \cap \ker L = 0$.

För (a) så noterar vi först att $L(\mathbf{x} \otimes \mathbf{y} + \mathbf{y} \otimes \mathbf{x}) = 0$ för alla $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$. För alla $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$ kan vi skriva:

$$\mathbf{x} \otimes \mathbf{y} = \frac{\mathbf{x} \otimes \mathbf{y} + \mathbf{y} \otimes \mathbf{x}}{2} + \frac{\mathbf{x} \otimes \mathbf{y} - \mathbf{y} \otimes \mathbf{x}}{2}$$

där första termen ligger i $\ker L$ och andra termen ligger i $\text{im } L$. Eftersom alla tensorer i $V \otimes V$ är ändliga summor av rena tensorer (alltså element på formen $\mathbf{x} \otimes \mathbf{y}$) så har vi en sådan uppdelning för alla tensorer:

$$\sum_{i=1}^n \mathbf{x}_i \otimes \mathbf{y}_i = \sum_{i=1}^n \frac{\mathbf{x}_i \otimes \mathbf{y}_i + \mathbf{y}_i \otimes \mathbf{x}_i}{2} + \sum_{i=1}^n \frac{\mathbf{x}_i \otimes \mathbf{y}_i - \mathbf{y}_i \otimes \mathbf{x}_i}{2}$$

För (b) så noterar vi att $L(L(\mathbf{x} \otimes \mathbf{y})) = 2L(\mathbf{x} \otimes \mathbf{y})$ för alla $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$ och således genom linjaritet att $L \circ L = 2L$. Om $L(\mathbf{w}) \in \ker L$ så är alltså $L(\mathbf{w}) = \frac{1}{2}L(L(\mathbf{w})) = 0$ och därmed är $\text{im } L \cap \ker L = 0$.

Kommentar: Om $\{\mathbf{e}_i\}_{i \in I}$ är en bas för V så ser man direkt från definitionen att

$$\text{im } L = \text{Span}\{\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j - \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_i : i, j \in I\}.$$

För att beräkna kärnan så kan vi betrakta bilden av en allmän tensor $\mathbf{x} = \sum_{i,j} a_{ij} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j$:

$$L\left(\sum_{i,j} a_{ij} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j\right) = \sum_{i,j} a_{ij} (\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j - \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_i) = \sum_{i,j} (a_{ij} - a_{ji}) \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j.$$

Eftersom $\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j$ är en bas så är alltså $\mathbf{x} \in \ker L$ precis när $a_{ij} = a_{ji}$ för alla i, j . Detta visar att

$$\ker L = \text{Span}\{\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j + \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_i : i, j \in I\}.$$

I just detta fall visar det sig också att $\ker L = \text{Span}\{\mathbf{x} \otimes \mathbf{y} : L(\mathbf{x} \otimes \mathbf{y}) = 0\}$ men i allmänhet räcker det inte att titta på rena tensorer $\mathbf{x} \otimes \mathbf{y}$ för att bestämma hela kärnan.

8. Låt $A \in M_n(\mathbb{C})$ vara en $n \times n$ -matris och låt $L: \mathbb{C}[x] \rightarrow M_n(\mathbb{C})$ vara den linjära avbildningen som definieras av $L(p(x)) = p(A) + p'(A)$.

(a) Bestäm de möjliga dimensionerna för bildrummet till L när A varierar men n är fixt. **(2 p)**

(b) Bestäm ett delrum $V \subset \mathbb{C}[x]$ sådant att $\mathbb{C}[x] = V \oplus \ker(L)$ när $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$. **(2 p)**

Lösningsförslag.

(a) Vi ser vad L gör på basen $\{1, x, x^2, \dots\}$:

$$L(1) = I, \quad L(x) = A + I, \quad L(x^2) = A^2 + 2A, \dots,$$

och i allmänhet $L(x^n) = A^n + (n-1)A^{n-1}$. Vi ser alltså att

$$\text{Span}\{L(1), L(x), L(x^2), \dots, L(x^n)\} = \text{Span}\{I, A, A^2, \dots, A^n\}$$

och därmed att

$$\text{im } L = \text{Span}\{I, A, A^2, \dots\}.$$

Alltså är $\dim(\text{im } L) = d$ om minimalpolynomet för A har grad d . Minimalpolynomet har grad $\leq n$ (Cayley–Hamiltons sats) och för fixt n , finns för varje $d = 1, 2, \dots, n$ en matris A med minimalpolynom av grad d . Vi kan till exempel ta en diagonalmatris med exakt d distinkta egenvärden. Observera att $d = 0$ inte är möjligt: även om $A = 0$ så är $\dim(\text{im } L) = 1$ eftersom $L(1) = I$. Minimalpolynomet till 0-matrisen är t vilket har grad 1.

(b) Notera att $V \cong \mathbb{C}[x]/\ker L \cong \text{im } L$ så $\dim V = d$ är graden av minimalpolynomet för A . Vi beräknar det karakteristiska polynomet

$$p_A(t) = (t-1)^2 + 4$$

vilket har två distinkta rötter $1 \pm 2i$. Alltså har minimalpolynomet också grad 2. Vi kan t ex välja $V = \text{Span}\{1, x\}$ eftersom $L(1)$ och $L(x)$ är linjärt oberoende och alltså är $V \cap \ker L = \{0\}$.

Svar.

- (a) Dimensionen för bildrummet kan vara $1, 2, \dots, n$.
 (b) T ex $V = \text{Span}\{1, x\}$.

9. Låt V vara ett ändligtdimensionellt komplext inre produktrum. Låt $V_1, V_2, \dots, V_m$ vara en-dimensionella delrum, för något $m \geq 1$, och låt $L_i: V \rightarrow V$ vara operatoren som projicerar ortogonalt på V_i för $i = 1, 2, \dots, m$. Låt $L = L_1 + L_2 + \dots + L_m$.
- (a) Visa att L är diagonaliserbar med högst m noll-skilda egenvärden. **(2 p)**
- (b) Visa att egenvärdena är reella och icke-negativa och att det största egenvärdet ligger i intervallet $[1, m]$. **(2 p)**

Lösningsförslag.

- (a) Välj vektorer $\mathbf{v}_i \in V_i$ av längd 1. Observera att $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m$ inte är en ortonormal bas men för ett fixerat i kan vi välja en ortonormal bas $\mathcal{B}_i = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3, \dots, \mathbf{b}_n\}$ med $\mathbf{b}_1 = \mathbf{v}_i$. I denna bas har L_i matrisen

$$[L_i]_{\mathcal{B}_i} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}.$$

Alltså är L_i självdjungerad och därmed är även $L = L_1 + L_2 + \dots + L_m$ självdjungerad (detta kan t ex verifieras genom att välja en ortonormal bas och notera att en summa av Hermiteska matriser är Hermitesk). Eftersom operatoren L är självdjungerad är den (ortogonalt) diagonaliserbar.

För en diagonaliserbar operator är rangen lika med antalet noll-skilda egenvärden räknat med multiplicitet. Eftersom $\text{im } L \subseteq \text{Span}\{V_1, V_2, \dots, V_m\}$ så är $\text{rk } L \leq m$ så det finns högst m noll-skilda egenvärden (även räknat med multiplicitet).

- (b) Eftersom L är självdjungerad så är egenvärdena reella. Vi såg också att $\text{tr}(L_i) = 1$ så $\text{tr}(L) = m$. Det räcker alltså att visa att egenvärdena är icke-negativa eftersom $0 < \lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_r$ och $\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_r = m$ medför att $\lambda_r \in [1, m]$. Här betecknar $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r$ de noll-skilda egenvärdena och $r = \text{rk } L \leq m$. Låt ξ vara en normerad egenvektor med egenvärde λ . Då är

$$\langle \xi | L(\xi) \rangle = \lambda.$$

Vi har också att $L_i(\xi) = \langle \mathbf{v}_i | \xi \rangle \mathbf{v}_i$. Alltså är:

$$\langle \xi | L_i(\xi) \rangle = \langle \mathbf{v}_i | \xi \rangle \langle \xi | \mathbf{v}_i \rangle = |\langle \mathbf{v}_i | \xi \rangle|^2 \geq 0$$

och därmed

$$\lambda = \sum_{i=1}^m \langle \xi | L_i(\xi) \rangle = \sum_{i=1}^m |\langle \mathbf{v}_i | \xi \rangle|^2 \geq 0.$$

(Detta visar även att $\lambda_r = m$ inträffar precis då $r = 1$, dvs då $V_1 = V_2 = \dots = V_m$, samt att $\lambda_r = 1$ inträffar precis då $V_1, V_2, \dots, V_m$ är parvis ortogonala och då är $r = m$.)