



**Lösningförslag till tentamen
9 januari 2019**

DEL I – BASALA PROBLEM

1. Låt $V = \mathbb{C}[x]$ vara vektorrummet av polynom med komplexa koefficienter. Definiera $L: V \rightarrow V$ genom $L(p(x)) = \int_{-x}^x p(t) dt$ för alla $p(x) \in V$. Visa att L är linjär och bestäm en bas för kärnan $\ker(L)$ och en bas för bildrummet $\text{im}(L)$.

(4 p)

Lösningförslag. Vi har att

$$L(p(x) + q(x)) = \int_{-x}^x (p(t) + q(t)) dt = \int_{-x}^x p(t) dt + \int_{-x}^x q(t) dt = L(p(x)) + L(q(x))$$

och

$$L(ap(x)) = \int_{-x}^x (ap(t)) dt = a \int_{-x}^x p(t) dt = aL(p(x))$$

vilket visar att L är linjär.

Om vi använder operatoren på en av våra basvektorer x^n får vi

$$L(x^n) = \int_{-x}^x t^n dt = \left[\frac{t^{n+1}}{n+1} \right]_{-x}^x = (1 - (-1)^{n+1}) \frac{x^{n+1}}{n+1}.$$

Detta blir noll om n är udda och $2/(n+1)x^{n+1}$ om n är jämnt. Bilden spänns upp av alla udda potenser av x och kärnan spänns upp av alla udda potenser av x . Därmed är $\ker(L) = \text{im}(L) = \text{Span}\{x, x^3, x^5, \dots\}$. Eftersom de udda potenserna av x är en delmängd av den ursprungliga basen är de linjärt oberoende och utgör en bas för både kärnan och bildrummet.

Svar. $\{x, x^3, x^5, \dots\}$ är en bas för både $\ker(L)$ och $\text{im}(L)$.

2. Låt $V = C^\infty(\mathbb{R})$ vara de oändligt deriverbara komplexvärda funktionerna på $\mathbb{R}$ med inre produkt

$$\langle f|g \rangle = \int_0^1 \overline{f(t)}g(t) dt, \quad \text{för alla } f, g \text{ i } V,$$

låt $W = \{f \in V: f(t+1) = f(t), \forall t \in \mathbb{R}\}$ och låt $L: W \rightarrow W$ ges av $L(f) = f'$. Bestäm den adjungerade operatoren $L^\dagger$.

(4 p)

Lösningförslag. Vi har att

$$\begin{aligned} \langle L(f)|g \rangle &= \int_0^1 \overline{f'(t)}g(t) dt = \left[\overline{f(t)}g(t) \right]_0^1 - \int_0^1 \overline{f(t)}g'(t) dt \\ &= \overline{f(1)}g(1) - \overline{f(0)}g(0) - \langle f|L(g) \rangle = \langle f| - L(g) \rangle \end{aligned}$$

där vi använt att $f(1) = f(0)$ och $g(1) = g(0)$. Därmed är $L^\dagger = -L$.

Svar. $L^\dagger = -L$.

3. I en Markovkedja ges fördelningen vid tidpunkt $t = n + 1$ av fördelningen vid tidpunkt $t = n$ genom den stokastiska matrisen

$$A = \frac{1}{10} \begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 7 & 4 & 5 \\ 0 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

Avgör om $\lim_{n \rightarrow \infty} A^n$ existerar och bestäm i så fall gränsvärdet.

(4 p)

Lösningsförslag. Enligt Perron-Frobenius sats kommer vi att ha konvergens om matrisen är reguljär, dvs om någon potens är positiv. I vårt fall är A^2 positiv, så vi får att

$$\lim_{n \rightarrow \infty} A^n = A_\infty = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

där $\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix}^T$ är en egenvektor med egenvärde 1 och $x_1 + x_2 + x_3 = 1$. Vi beräknar denna egenvektor som ett element i kärnan till $A - I$, dvs genom ekvationssystemet med totalmatris

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -7 & 2 & 4 & 0 \\ 7 & -6 & 5 & 0 \\ 0 & 4 & -9 & 0 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} -7 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & -4 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} -14 & 0 & 17 & 0 \\ 0 & -4 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

vilket ger $(x_1, x_2, x_3) = t(34, 63, 28)$ och för att $x_1 + x_2 + x_3 = 1$ måste $t^{-1} = 34 + 63 + 28 = 125$. Alltså får vi konvergens mot

$$\frac{1}{125} \begin{bmatrix} 34 & 34 & 34 \\ 63 & 63 & 63 \\ 28 & 28 & 28 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,272 & 0,272 & 0,272 \\ 0,504 & 0,504 & 0,504 \\ 0,224 & 0,224 & 0,224 \end{bmatrix}.$$

Svar. Gränsvärdet existerar och är lika med $\frac{1}{125} \begin{bmatrix} 34 & 34 & 34 \\ 63 & 63 & 63 \\ 28 & 28 & 28 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,272 & 0,272 & 0,272 \\ 0,504 & 0,504 & 0,504 \\ 0,224 & 0,224 & 0,224 \end{bmatrix}.$

DEL II – BEGREPP OCH SATSER

4. (a) Definiera begreppen *egenvektor* och *egenvärde* till en linjär operator L på ett vektorrum V . (1 p)
- (b) Definiera begreppet *minimalpolynom* för en linjär operator L på ett vektorrum V och visa att alla egenvärden till L måste vara nollställen till minimalpolynomet om L har ett minimalpolynom. (1 p)
- (c) Visa att alla operatorer på V har ett minimalpolynom om $\dim V < \infty$ och ge ett exempel på en operator på ett oändligdimensionellt vektorrum som saknar minimalpolynom. (2 p)

Lösningsförslag.

- (a) En egenvektor är en vektor $x \neq 0$ som uppfyller $L(x) = \lambda x$ för någon skalär λ . Ett egenvärde är en skalär λ för vilket det finns en egenvektor.
- (b) Minimalpolynomet för en operator är ett moniskt polynom av lägsta grad sådant att $q(L) = 0$ som operator. Om λ är ett egenvärde och x en egenvektor som hör till λ så har vi $0 = q(L)x = q(\lambda)x$ och eftersom $x \neq 0$ måste $q(\lambda) = 0$.
- (c) Om $\dim V = n$ kan vi representera en operator L med en $n \times n$ -matris, A . Eftersom vektorrummet av $n \times n$ -matriser har dimension n^2 kan inte de $n^2 + 1$ matriserna $\{A^0, A^1, A^2, \dots, A^{n^2}\}$ vara linjärt oberoende. Därmed finns ett polynom $p(x)$ av grad högst n^2 så att $p(A) = 0$ och då måste finnas ett moniskt polynom $q(x)$ av lägsta grad så att $q(A) = 0$, vilket är ekvivalent med att $q(L) = 0$.
- Om $L = d/dt$ på vektorrummet $C^\infty(\mathbb{R})$ av oändligt deriverbara funktioner på $\mathbb{R}$ så finns inget polynom så att $p(L) = 0$ eftersom lösningsmängden till $p(L)f = 0$ är ändligdimensionell för varje nollskilt polynom $p(x)$. Ett annat exempel är multiplikation med x på $\mathbb{C}[x]$. Ett tredje exempel är om L är multiplikation med π eller något annat transcendent tal på vektorrummet av reella tal med de rationella talen som skalärer.

5. (a) Vad menas med att en operator L på ett komplext inre-produktrum är *unitär*? (1 p)
- (b) Ge exempel på en linjär operator L på ett komplext inre-produktrum V som uppfyller $\|L(x)\| = \|x\|$ för alla x i V utan att L är unitär. (1 p)
- (c) Visa att $\exp(iH)$ är unitär om H är en självadjungerad operator och $\exp(iH)$ är väldefinierad. (2 p)

Lösningsförslag.

- (a) En unitär operator är en inverterbar operator L som uppfyller att $\|L(x)\| = \|x\|$ för alla x .
- (b) Om vi tar $\ell^2(\mathbb{C})$ och definierar $L(\{a_0, a_1, \dots\}) = \{0, a_0, a_1, \dots\}$ gäller att $\|L(x)\|^2 = \sum_{i=0}^{\infty} |a_i|^2 = \|x\|^2$, men L är inte inverterbar eftersom den inte är surjektiv när $L(x)$ har första elementet noll för alla x .
- (c) Om H är självadjungerad har vi att $H^\dagger = H$. Eftersom $L = \exp(iH)$ är väldefinierad konvergerar serien

$$L = \exp(iH) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(iH)^n}{n!}$$

och vi kan beräkna den adjungerade operatoren $L^\dagger$ som

$$L^\dagger = (\exp(iH))^\dagger = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{(iH)^n}{n!} \right)^\dagger = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{(-iH^\dagger)^n}{n!} \right) = \exp(-iH^\dagger) = \exp(-iH),$$

som är väldefinierad eftersom serien för $L = \exp(iH)$ konvergerar.

Vi kan kontrollera att detta verkligen är den adjungerade operatoren till L genom att se på

$$\langle \exp(-iH)(x) | y \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n}{n!} \langle H^n(x) | y \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n}{n!} \langle x | H^n(y) \rangle = \langle x | \exp(iH)(y) \rangle.$$

Nu får vi att

$$L^\dagger L = \exp(-iH) \exp(iH) = \exp(-iH + iH) = \exp(0) = I$$

där vi använt att $\exp(A + B) = \exp(A) \exp(B)$ om $AB = BA$.

Om vi kan diagonalisera H , t.ex. om H är en Hermitesk operator på ett ändligdimensionellt vektorrum, kan vi hitta en ortonormal bas av egenvektorer för H och motsvarande egenvärden är reella. Därmed får vi att $\exp(iH)$ har egenvärden som har belopp 1 med samma ortonormala bas av egenvektorer. Alltså är $\exp(iH)$ unitär.

DEL III – AVANCERADE PROBLEM

6. En följd av 2×2 -matriser $\{X_i\}_{i \geq 0}$ definieras rekursivt av

$$X_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad X_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \text{och} \quad X_{n+1} = 3X_n - 2X_{n-1}, \quad n \geq 1.$$

Bestäm en explicit formel för X_n .

(4 p)

Lösningsförslag. Vi kan lösa rekursionen $x_{n+1} = 3x_n - 2x_{n-1}$ med hjälp av en matris genom att skriva

$$\begin{bmatrix} x_{n+1} \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_n \\ x_{n-1} \end{bmatrix}.$$

Matrisen har egenvärden 1 och 2 med egenvektorer

$$\xi_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{och} \quad \xi_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Därmed kommer vi att kunna skriva

$$X_n = B + 2^n C$$

för 2×2 -matriser B och C . Genom att se på $n = 0$ och $n = 1$ får vi

$$X_0 = B + C \quad \text{och} \quad X_1 = B + 2C$$

vilket ger $B = 2X_0 - X_1$ och $C = X_1 - X_0$. Alltså får vi

$$X_n = B + 2^n C = 2 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} + 2^n \left(\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} + 2^n \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Svar. $X_n = \begin{bmatrix} 1 & 2^n - 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$

7. Låt $V = \mathbb{C}^n$ med bas $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$. Bestäm rangen av den linjära avbildningen

$$L: \bigwedge^2 V \longrightarrow \bigwedge^3 V$$

som ges av $L(x) = x \wedge (e_1 + e_2 + \dots + e_n)$, för $x \in \bigwedge^2 V$.

(4 p)

Lösningsförslag. Vi kan välja en ny bas för V där $f_1 = e_1 + e_2 + \dots + e_n$ och då ser vi att

$$L \left(\sum_{1 \leq i < j \leq n} a_{ij} f_i \wedge f_j \right) = \sum_{1 < i < j \leq n} a_{ij} f_i \wedge f_j \wedge f_1 = \sum_{1 < i < j \leq n} a_{ij} f_1 \wedge f_i \wedge f_j$$

Vektorerna $f_1 \wedge f_i \wedge f_j$ för $2 \leq i < j \leq n$ är linjärt oberoende och bildar en bas för bildrummet. Alltså är rangen lika med antalet sådana basvektorer. Vi får rangen till $(n-2)(n-1)/2 = \binom{n-1}{2}$.

Svar. Rangen är $\binom{n-1}{2} = (n-1)(n-2)/2$.

8. För heltal $n \geq 1$ låt P_n vara vektorrummet av polynom av grad högst n med komplexa koefficienter. Definiera $L: P_n \rightarrow P_n$ genom

$$L(p(x)) = p(x+1) - 2p(x) + p(x-1), \quad \text{för alla } p(x) \in P_n.$$

Visa att L är nilpotent och bestäm Jordans normalform för L .

(4 p)

Lösningförslag. Vi har att

$$L(x^k) = (x+1)^k - 2x^k + (x-1)^k = 2\binom{k}{2}x^{k-2} + 2\binom{k}{4}x^{k-4} + \dots$$

Alltså har $L(p(x))$ lägre grad än $p(x)$ och därmed måste $L^{n+1}(p(x)) = 0$ för alla polynom av grad högst n . Eftersom graden minskar med två blir det i själva verket en lägre potens av L som är noll.

Enligt utveckling ovan ser vi att udda och jämna potenser av x aldrig blandas. Vi kan skriva $V = V_0 \oplus V_1$ där V_0 är polynom med bara termer av jämn grad och V_1 är polynom med bara termer av udda grad. Då är $L(V_0) \subseteq V_0$ och $L(V_1) \subseteq V_1$. Det återstår att se hur Jordanuppdelningen ser ut på var och en av dessa. Eftersom $L(x^k)$ har grad $k-2$ och är skilt från noll om $k > 1$ får vi att $L^m(x^n) \neq 0$ om $2m \leq n-1$ och $L^m(x^{n-1}) \neq 0$ om $2m \leq n$. Därmed har vi att L bara har ett Jordanblock på V_0 och ett Jordanblock på V_1 . Jordanbasen ges av

$$\{L^m(x^n), L^{m-1}(x^n), \dots, L^0(x^n), L^k(x^{n-1}), L^{k-1}(x^{n-1}), \dots, L^0(x^{n-1})\}$$

där $m = \lfloor (n-1)/2 \rfloor$ och $k = \lfloor (n-2)/2 \rfloor$.

Svar. Jordanformen har två block som är lika stora om n är udda och som skiljer med ett i storlek om n är jämnt.

9. Visa att en operator L på ett vektorrum V som uppfyller $L^2 = I$ är diagonaliserbar, oavsett om $\dim V$ är ändlig eller inte, under förutsättning att $1 + 1 \neq 0$ i den kropp som utgör skalärerna för V . (Ledning: Betrakta operatorerna $L_1 = \frac{1}{2}(I + L)$ och $L_2 = \frac{1}{2}(I - L)$.)

Detta ger att en operator som är både unitär och självadjungerad måste vara diagonaliserbar. Varför?

(4 p)

Lösningförslag. Om $L^2 = I$ har vi att egenvärdena bara kan vara ± 1 . Vi kan skriva $V = E_1 \oplus E_{-1}$ eftersom varje vektor kan skrivas som

$$x = \frac{1}{2}(x + L(x)) + \frac{1}{2}(x - L(x))$$

där $x + L(x) \in E_1$ eftersom $L(x + L(x)) = L(x) + L^2(x) = L(x) + x = x + L(x)$ och $x - L(x) \in E_{-1}$ eftersom $L(x - L(x)) = L(x) - L^2(x) = L(x) - x = -(x - L(x))$. Det är en direkt summa eftersom $E_1 \cap E_{-1} = \{0\}$ då en egenvektor inte kan ha två olika egenvärden.

En unitär självadjungerad operator L uppfyller $L^\dagger = L$ och $L^\dagger = L^{-1}$. Alltså är $L = L^{-1}$ och $L^2 = I$. Därmed kan vi använda det vi just har visat för sådana operatorer.