



SF1683 Differentialekvationer och transformmetoder HT22, del 1
Övningstentamen 2

För full poäng på en uppgift krävs att lösningen är väl presenterad och lätt att följa. Det innebär speciellt att införda beteckningar ska definieras, att den logiska strukturen tydligt beskrivs i ord eller symboler och att resonemangen är väl motiverade och tydligt förklarade. Lösningar som allvarligt brister i dessa avseenden bedöms med högst två poäng.

DEL I – GRUNDLÄGGANDE PROBLEM

1. Bestäm den allmänna lösningen till systemet

$$\begin{cases} x'(t) = 3x(t) - y(t) \\ y'(t) = 9x(t) - 3y(t) \end{cases}.$$

(Ledning: matrisen $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 9 & -3 \end{pmatrix}$ har $m = 0$ som ett dubbelt egenvärde.) (4 p)

2. Differentialekvationen

$$y^2 y'' + (y')^3 = 0$$

för $y = y(x)$ innehåller inte variabeln x explicit. Använd metoden med reduktion av ordningen för att lösa ekvationen.

(4 p)

3. Differentialekvationen

$$y'' - xy = 0, \quad y = y(x),$$

har en lösning y_1 som uppfyller $y_1(0) = 1, y_1'(0) = 0$. Bestäm denna lösning på serieform vid $x = 0$,

$$y_1 = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n.$$

För detta ska du ange den rekursionsrelation som ger koefficienterna a_n samt beräkna termer till minst ordning 6.

(4 p)

DEL II – AVANCERADE PROBLEM

4. Bestäm de kritiska punkterna till det autonoma systemet

$$\begin{cases} x' = -2xy \\ y' = y - x + xy - y^3 \end{cases}.$$

Använd linjärisering för att avgöra (i de fall det är möjligt) om dessa är stabila och vilket utseende de har. **(4 p)**

5. Ekvationen

$$(x - c)^2 + y^2 = c^2$$

där $c \in \mathbb{R}$ är en parameter beskriver en familj av cirklar med centrum i punkterna $x = c$ på x -axeln och radie c .

- (a) De ortogonala trajektorierna till denna familj är den familj av kurvor som skär cirk-larna vinkelrätt i alla punkter. Visa att de ortogonala trajektorierna ges av lösningarna till differentialekvationen

$$2xy + (y^2 - x^2) \frac{dy}{dx} = 0.$$

- (b) Ekvationen ovan kan göras exakt genom att multiplicera med en integrerande faktor. Använd detta för att bestämma de ortogonala trajektorierna. (*Ledning: det finns en integrerade faktor som bara beror på y .*)

(4 p)

6. Antag att det homogena linjära systemet

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} a_1(t) & b_1(t) \\ a_2(t) & b_2(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$$

har den allmänna lösningen $\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} x_1(t) \\ y_1(t) \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} x_2(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix}.$

- (a) Härled de ekvationer som $\begin{pmatrix} v_1(t) \\ v_2(t) \end{pmatrix}$ måste uppfylla för att ansatsen (variation av parametrar)

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = v_1(t) \begin{pmatrix} x_1(t) \\ y_1(t) \end{pmatrix} + v_2(t) \begin{pmatrix} x_2(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix}.$$

ska ge en lösning till det inhomogena systemet

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} a_1(t) & b_1(t) \\ a_2(t) & b_2(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \end{pmatrix}.$$

- (b) Använd denna metod för att hitta den allmänna lösningen till systemet

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ t \end{pmatrix}.$$

(*Ledning: egenvärdena till matrisen här är $m_1 = 0$, $m_2 = 1$.*)

(4 p)