



**SF1681 Linjär algebra, fk
Tentamen
8 april 2021**

Skrivtid: 8:00–13:00

Tillåtna hjälpmedel: inga

Examinator: David Rydh

Tentamen består av nio uppgifter som vardera ger maximalt fyra poäng. Del I utgörs av de tre första uppgifterna som testar förmågan att lösa grundläggande problem. Del II utgörs av de två följande uppgifterna och testar begreppsförståelse och kunskap om satser och samband. De fyra sista uppgifterna utgör del III och testar förmågan att lösa mer avancerade problem och är avsedda främst för högre betyg. Bonuspoäng av typ I adderas till erhållna poäng på del I och bonuspoäng av typ II adderas till erhållna poäng på del II. Det går dock inte att få mer än 12 respektive 8 poäng på dessa delar. Betygsgränserna vid tentamen kommer preliminärt att ges av följande tabell där kolumnerna anger poänggräns för respektive del/hela skrivningen.

Del	Poäng	Innehåll	Fx	E	D	C	B	A
I	12	Grundläggande problem	-	-	-	-	-	-
II	8	Begrepp och satser	4	4	4	6	6	6
III	16	Avancerade problem	-	-	-	-	-	-
hela	36		11	12	18	22	26	30

Till exempel krävs för betyg C minst 22 poäng totalt varav 6 poäng på del II.

För full poäng på en uppgift krävs att lösningen är väl presenterad och lätt att följa. Det innebär speciellt att införda beteckningar ska definieras, att den logiska strukturen tydligt beskrivs i ord eller symboler och att resonemangen är väl motiverade och tydligt förklarade. Lösningar som allvarligt brister i dessa avseenden bedöms med högst två poäng.

Var god vänd!

DEL I – GRUNDLÄGGANDE PROBLEM

1. Låt A vara följande reella matris.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Bestäm det karakteristiska polynomet $p_A(t)$ och minimalpolynomet $q_A(t)$. **(4 p)**

2. Låt $C^0([0, 2\pi], \mathbb{C})$ vara vektorrummet av kontinuerliga komplexvärda funktioner på intervallet $[0, 2\pi]$ med inre produkt $\langle f(x)|g(x) \rangle = \int_0^{2\pi} \overline{f(x)}g(x) dx$. Låt V vara delrummet av trigonometriska polynom, dvs $V = \text{Span}\{e^{ikx} : k \in \mathbb{Z}\}$. Avgör om följande operatorer på V är självadjungerade och/eller unitära.

(a) $L_1(f)(x) = f'(x)$ **(2 p)**

(b) $L_2(f)(x) = (e^{ix} + e^{-ix})f(x)$ **(2 p)**

3. Vi har en stokastisk process $\mathbf{p}(t)$ som ges av $\mathbf{p}(t+1) = A\mathbf{p}(t)$ där

$$A = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

med startfördelningen $\mathbf{p}(0) = [0.2 \quad 0.3 \quad 0.5]^T$. Avgör om gränsvärdet $\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{p}(t)$ existerar och beräkna i så fall det. **(4 p)**

DEL II – BEGREPP OCH SATSER

4. Låt V vara ett ändligtdimensionellt komplext vektorrum och L en linjär operator på V .
- (a) Definiera begreppen *generaliserad egenvektor* (kallas *power vector* i kursboken) och *generaliserat egenrum* för L . **(1 p)**
 - (b) Beskriv de operatorer vars generaliserade och vanliga egenrum sammanfaller. **(1 p)**
 - (c) Bestäm alla möjliga Jordans normalformer om L är nilpotent och $\dim V = 3$. **(1 p)**
 - (d) Ge ett exempel på två operatorer med samma karakteristiska polynom men inte samma Jordans normalform. **(1 p)**
5. Låt V och W vara vektorrum med baser $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n$ och $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \dots, \mathbf{f}_m$.
- (a) Ange en bas för *tensorprodukten* $V \otimes W$. Vad är dess dimension? **(1 p)**
 - (b) Ange en bas för den *yttre potensen* $\bigwedge^2 V$. Vad är dess dimension? **(1 p)**
 - (c) Definiera en naturlig linjär avbildning $L: W \otimes V^* \rightarrow \text{Hom}(V, W)$ utan att hänvisa till baserna (där V^* betecknar det duala vektorrummet). **(1 p)**
 - (d) Visa att L är en isomorfi. *Tips: Här kan du använda baser.* **(1 p)**

DEL III – AVANCERADE PROBLEM

6. Betrakta Hilbertrummet $\ell_2(\mathbb{C})$ av oändliga följder $\mathbf{a} = (a_0, a_1, \dots)$ av komplexa tal sådana att $\sum_{j=0}^{\infty} |a_j|^2 < \infty$ med den inre produkten $\langle \mathbf{a} | \mathbf{b} \rangle = \sum_{j=0}^{\infty} \overline{a_j} b_j$. Låt V vara delrummet av följder $\mathbf{a} = (a_0, a_1, \dots)$ sådana att $a_{2k+1} = a_{2k}$ för alla heltal $k \geq 0$.

- (a) Bestäm det ortogonala komplementet $V^\perp$. (2 p)
 (b) Är $\ell_2(\mathbb{C})$ en inre direkt summa av V och $V^\perp$? (2 p)

7. Låt A vara följande 2×2 -matris med element i kroppen $\mathbb{F}_3 = \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} = \{0, 1, -1\}$:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

- (a) Visa att $\{p(A) : p(x) \in \mathbb{F}_3[x]\}$ utgör en kropp K och bestäm antalet element i denna kropp. (2 p)
 (b) Betrakta nu A som en 2×2 -matris över kroppen K . Bestäm dess egenvärden i K och motsvarande egenvektorer i K^2 . (2 p)

8. Låt A vara en komplex $n \times n$ -matris med egenvärden $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ och singularvärden $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_n$.

- (a) Visa att $|\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_n| = \sigma_1 \sigma_2 \dots \sigma_n$. (2 p)
 (b) Visa att $|\lambda_i| \leq \sigma_1$ för alla i . (2 p)

9. Låt V och W vara vektorrum med baserna $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n\}$ och $\{\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \dots, \mathbf{f}_m\}$. För en delmängd $S = \{s_1, s_2, \dots, s_m\} \subseteq \{1, 2, \dots, n\}$ av storlek m med $s_1 < s_2 < \dots < s_m$ låter vi $P_S: V \rightarrow W$ och $J_S: W \rightarrow V$ vara de linjära avbildningarna som ges av

$$J_S(\mathbf{f}_i) = \mathbf{e}_{s_i}, \quad P_S(\mathbf{e}_j) = \begin{cases} \mathbf{f}_i & \text{om } j = s_i \\ \mathbf{0} & \text{om } j \notin S \end{cases}$$

Låt $L_S = J_S \circ P_S$.

- (a) Visa att $\sum_S (\bigwedge^m L_S)$ är identitetsoperatoren på $\bigwedge^m V$. (2 p)
 (b) Visa att $\det(A \circ B) = \sum_S \det(A \circ J_S) \det(P_S \circ B)$ om $A: V \rightarrow W$ och $B: W \rightarrow V$ är linjära avbildningar. (2 p)

Summorna är över alla delmängder $S \subseteq \{1, 2, \dots, n\}$ av storlek m . Finns inga sådana delmängder så är summan 0.