



KTH Teknikvetenskap

SF1672 (SF1604) Linjär Algebra
Lösningsförslag till tentamen 2019.01.07

DEL A

1. Bestäm matrisen X när vi har att $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix}$. **(4 p)**

Lösning. Vi har att

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -3 \\ 5 & 5 \end{bmatrix}.$$

Determinanten till denna matris är $15 + 15 = 30$. Detta ger att matrisen

$$X = \frac{1}{30} \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ -5 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix} = \frac{1}{30} \begin{bmatrix} 8 & 10 & 9 \\ -2 & -10 & -21 \end{bmatrix}.$$

□

2. Avbildningen $T_A: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ ges av matrisen

$$A = \frac{1}{10} \begin{bmatrix} -20 & 0 & 10 & -10 \\ 64 & 16 & -18 & 22 \\ 14 & 16 & 7 & -3 \\ -46 & 16 & 37 & -33 \end{bmatrix}.$$

- (a) Visa att noll-rummet N_A till T_A har dimension 2. (2 p)
- (b) Bestäm en linjär avbildning $S: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ vars bildrum är N_A . (2 p)
- (c) Visa att $X = [0 \ 1 \ 1 \ 1]^T$ är en egenvektor med egenvärde 2. (2 p)
- (d) Ett egenvärde till A är -5 . Är T_A diagonaliserbar? (2 p)
- (e) Bestäm determinanten $\det(A^3)$. (2 p)
- (f) Bestäm egenvärdena till A^3 . (2 p)

Lösning. a) Vi utför Gauss-Jordan elimination på matrisen A . Vi adderar relevanta multipler av första raden till andra, tredje och fjärde raden. Detta ger matrisen

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 16 & 14 & -10 \end{bmatrix}.$$

Det är nu klart att den reducerade trappstegsformen till A vill ha två ledande ettor, vilket ger att nollrummet har dimension $4 - 2 = 2$.

b) Om vi skriver upp nollrummet till A har vi att N_A är alla vektorer på formen

$$[4s - 4t \quad -7s + 5t \quad 8s \quad 8t]^T.$$

En bas ges av vektorerna $[4 \ -7 \ 8 \ 0]^T$ och $[-4 \ 5 \ 0 \ 8]^T$. Den linjära avbildningen $S: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ som ges av matrisen

$$B = \begin{bmatrix} 4 & -4 & 0 & 0 \\ -7 & 5 & 0 & 0 \\ 8 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

har per konstruktion ett bildrum lika med N_A .

c) Vi multiplicerar

$$AX = \frac{1}{10} \begin{bmatrix} 10 - 10 \\ 16 - 18 + 22 \\ 16 + 7 - 3 \\ 16 + 37 - 33 \end{bmatrix} = \frac{1}{10} \begin{bmatrix} 0 \\ 20 \\ 20 \\ 20 \end{bmatrix} = 2 \cdot X.$$

Med andra ord är X en egenvektor med egenvärde 2.

d) Ja. Vi har att -2 och 5 är egenvektorer, samt att 0 är ett egenvärde med ett tillhörande två dimensionellt egenrum. Det följer nu att vi kan hitta en bas av egenvektorer för $\mathbb{R}^4$, och detta är ekvivalent med att matrisen A är diagonaliserbar.

e) Vi har att $\det(A^3) = \det(A)^3$, och från a) följer det att determinanten till A är noll.

f) Egenvektorerna till A^3 är precis egenvektorerna till A . Egenvärdena blir 0 , 8 och -125 . □

3. Planet H_1 ges av ekvationen $3x + 4y - 5z = 0$, och planet H_2 ges av $3x + 4y - 5z = 20$.
- (a) Bestäm avståndet mellan planen H_1 och H_2 . **(2 p)**
- (b) Bestäm en ekvation för planet H som är ortogonal mot H_2 och som är sådan att skärningen med H_1 är linjen $\ell = \text{Span}\left(\begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}\right)$. **(2 p)**

Lösning. a) Planen H_1 och H_2 är parallella. Avståndet ges då som längden av vektorn $\text{proj}_N \vec{v}$, där N är linjen som spänns upp av normalvektorn $\vec{n} = [3 \ 4 \ -5]^T$, och vektorn $\vec{v}$ representerar en pil som börjar i det ena planet och slutar i det andra planet. Låt $\vec{v} = \vec{PQ}$ där $P = \vec{0}$ och där $Q = [0 \ 0 \ -4]^T$. Då är

$$\text{proj}_N(\vec{v}) = \frac{20}{\|\vec{n}\|^2} \vec{n}.$$

Längden blir $20/\|\vec{n}\| = 20/\sqrt{50} = 2\sqrt{2}$.

b) En normal till H_2 är $\vec{n} = [3 \ 4 \ -5]^T$. En riktningsvektor för linjen ℓ är $\vec{v} = [3 \ 0 \ 5]^T$. Vi har att vektorn

$$\vec{m} = \vec{n} \times \vec{v} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ -5 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \\ -34 \\ -20 \end{bmatrix}$$

är en normal till det sökta planet H . Planet H går genom origo, och därmed har vi att en ekvation för H är $6x - 17y - 10z = 0$. $\square$

DEL B

4. Visa följande påståenden. (4 p)

(a) Lösningssmängden till ett homogent ekvationssystem i n okända är ett delrum i $\mathbb{R}^n$.

(b) Ett delrum i $\mathbb{R}^n$ är lösningssmängden till ett homogent ekvationssystem i n okända.

Lösning. a) Ett homogent ekvationssystem kan vi skriva som $AX = 0$ där X en matrisen med okända, och A är koefficientmatrisen till systemet. Vi har att $X = 0$ är en lösning. Om X och Y är lösningar har vi att $A(X + Y) = AX + AY = 0$ så $X + Y$ är en lösning. Och om t är en skalär har vi att $A(tX) = tAX = t0 = 0$, så tX är också en lösning. Vi har nu visat att lösningssmängden är ett delrum.

b) Låt W vara ett delrum i $\mathbb{R}^n$. Låt matrisen A vara sådan att dets kolumner bildar en bas för delrummet $W^\perp$, dvs en bas för ortogonal komplementet till W . Då vill lösningarna till det homogena ekvationssystemet $A^T X = 0$ vara mängden $(W^\perp)^\perp = W$. Då kolumnerna i A är vektorer i $\mathbb{R}^n$, vill ekvationssystemet $A^T X = 0$ ha n styck okända variabler. $\square$

5. På vektorrummet P_3 av polynom av grad ≤ 3 har vi indreproduktstrukturen

$$f \cdot g = \int_{-1}^1 fg \, dt.$$

Låt $S: P_3 \rightarrow P_3$ vara avbildningen $S(f) = 5\text{proj}_V(f) - 2f$ där V är delrummet som spänns upp av vektorerna $1 + 2t + t^2$ och $t + t^2 + 3t^3$.

- (a) Bestäm matrisrepresentationen D för avbildningen S med avseende på någon bas β av egenvektorer (basen β behöver inte bestämmas). **(2 p)**
 (b) Är avbildningen S ortogonalt diagonaliserbar? **(2 p)**
 (c) Basen γ definieras genom att låta

$$P = \begin{bmatrix} 2 & -8 & 6 & 8 \\ 3 & -9 & 5 & 10 \\ -3 & 0 & 1 & -2 \\ 1 & -4 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

vara övergångsmatrisen från basen γ till basen β från uppgift a). Låt A vara matrisrepresentationen för S i basen γ . Bestäm en av följande fyra matriser $P^{-1}AP$, PAP^{-1} , $P^{-1}DP$, eller PDP^{-1} . (Ange vilken du väljer.) **(2 p)**

Lösning. a). Vektorerna som spänner upp V är linjärt oberoende, så V har dimension två. Då P_3 har dimension fyra blir också $V^\perp$ två-dimensionell. Vi kan hitta en bas $\beta = \{f_1, f_2, g_1, g_2\}$ där f_1, f_2 är en bas för V , och g_1, g_2 är en bas för $V^\perp$. För f i V har vi att $S(f) = 5\text{proj}_V(f) - 2f = 5f - 2f = 3f$. Och för f i $V^\perp$ har vi att $S(f) = 5\text{proj}_V(f) - 2f = 0 - 2f$. Detta betyder att matrisrepresentationen för S i basen β blir matrisen

$$D = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}.$$

b) Ja, avbildningen är ortogonalt diagonaliserbar. Vi kan hitta en ON-bas för V , och en ON-bas för $V^\perp$. Detta ger oss en ON-bas av egenvektorer för P_3 .

c) Informationen vi har ger det kommutativa diagrammet av matriser och matrismultiplikation

$$\begin{array}{ccc} V_\beta & \xrightarrow{D} & V_\beta \\ P \uparrow & & \uparrow P \\ V_\gamma & \xrightarrow{A} & V_\gamma \end{array}$$

Om vi nu väljer att bestämma PAP^{-1} så har vi att detta är matrisen D som vi bestämde i a). □

6. Låt M vara en (4×3) matris, och låt $V \subseteq \mathbb{R}^4$ vara det linjära höljet av kolumnerna i M . Vi definierar vektorn $\vec{v}$ i $\mathbb{R}^4$ som

$$\vec{v} = \vec{v}(M) = [\det(M_1) \quad -\det(M_2) \quad \det(M_3) \quad -\det(M_4)]^T,$$

där M_i är matrisen vi får när rad i tas bort från matrisen M ($i = 1, 2, 3, 4$).

(a) Visa att vektorn $\vec{v}$ är ortogonal på V . (2 p)

(b) Visa att $\vec{v} \neq \vec{0}$ om $\dim(V) = 3$. (2 p)

Lösning. a) Låt $\vec{n} = [a \quad b \quad c \quad d]^T$ vara en godtycklig vektor i $\mathbb{R}^4$. Utöka matrisen M till en (4×4) -matris M' där vår nya vektor är första kolumn. Determinanten till denna nya matris utvecklar vi längs med första kolumn, och detta ger

$$\det(M') = a \det(M_1) - b \det(M_2) + c \det(M_3) - d \det(M_4) = \vec{n} \cdot \vec{v}.$$

Om vektorn $\vec{n}$ väljs från delrummet V har vi per definition att kolumnerna i matrisen M' är linjärt beroende, och då vet vi att determinanten $\det(M') = 0$. Detta gäller för alla vektorer $\vec{n}$ i V , och följdaktligen är vektorn $\vec{v}$ ortogonal på V .

b) Om dimensionen till V är 3 då är kolumnerna i matrisen M linjärt oberoende. Välj nu en vektor $\vec{n}$ som tillsammans med kolumnerna i M utgör en bas för $\mathbb{R}^4$. Då vet vi att determinanten till matrisen M' är noll-skild. Speciellt har vi då att $\vec{n} \cdot \vec{v} \neq 0$, vilket omöjliggör att vektorn $\vec{v}$ skulle vara noll vektorn. □

7. Fibonaccisekvensen $0, 1, 1, 2, 3, 5, \dots$ definieras rekursivt som $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$, där $f_0 = 0$ och $f_1 = 1$. Visa att

$$f_n = \frac{1}{\alpha} \left[\frac{(1+\alpha)^n}{2^n} - \frac{(1-\alpha)^n}{2^n} \right],$$

för alla $n \geq 0$, där $\alpha = \sqrt{5}$.

(6 p)

Lösning. Matrisen $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ är sådan att

$$A \cdot \begin{bmatrix} f_{n-1} \\ f_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_n \\ f_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_n \\ f_{n+1} \end{bmatrix}.$$

Detta betyder att $\begin{bmatrix} f_n \\ f_{n+1} \end{bmatrix} = A^n \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$. Vi börjar med att diagonalisera A . Matrisen A har karakteristisk polynom $\det(\lambda I - A)$ lika med $\lambda^2 - \lambda - 1$. Egenvärden ges av $\lambda^2 - \lambda - 1 = (\lambda - \frac{1}{2})^2 - \frac{5}{4} = 0$, med andra ord $\pm \frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}(1 \pm \alpha)$ där $\alpha = \sqrt{5}$. Då matrisen A är symmetrisk vet vi att egenrummen är ortogonala linjer. Låt E_1 vara egenrummet tillhörande egenvärdet $\frac{1}{2}(1 - \alpha)$. Då ges E_1 som nollrummet till matrisen

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2}(1 - \alpha) & -1 \\ -1 & \frac{1}{2}(1 - \alpha) - 1 \end{bmatrix}.$$

Vi vet att raderna är linjärt beroende, och det följer att egenrummet E_1 ges av ekvationen $(1 - \alpha)x - 2y = 0$. Vi har därmed att i matrisen

$$P = \begin{bmatrix} 2 & 1 - \alpha \\ 1 - \alpha & -2 \end{bmatrix}$$

vill första kolumn vara en bas för E_1 , och andra kolumn utgör en bas för E_2 . Vi låter kolumnerna bilda en bas av egenvektorer. Vi har att P är övergångsmatrisen från den givna basen av egenvektorer till standardbasen, vilket ger att $A^n = P D^n P^{-1}$, där

$$D^n = \frac{1}{2^n} \begin{bmatrix} (1 - \alpha)^n & 0 \\ 0 & (1 + \alpha)^n \end{bmatrix}$$

och där

$$P^{-1} = \frac{-1}{2\alpha(1 - \alpha)} \begin{bmatrix} 2 & (1 - \alpha) \\ (1 - \alpha) & -2 \end{bmatrix}.$$

I uttrycket för P^{-1} har vi använt att determinanten till P är

$$\det(P) = -4 - (1 - \alpha)^2 = -10 + 2\alpha = 2\alpha(1 - \alpha).$$

Vi beräknar

$$D^n P^{-1} = \frac{-1}{2\alpha(1 - \alpha)} \cdot \frac{1}{2^n} \begin{bmatrix} 2(1 - \alpha)^n & (1 - \alpha)^{n+1} \\ (1 - \alpha)(1 + \alpha)^n & -2(1 + \alpha)^n \end{bmatrix}.$$

Då vi är intresserad av f_n som alltså är första komponent i $A^n \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ behöver vi enbart bestämma koefficient $(1, 2)$ i matrisen $A^n = PD^nP^{-1}$. Denna är

$$\frac{-1}{2\alpha(1-\alpha)} \cdot \frac{1}{2^n} [2(1-\alpha)^{n+1} - 2(1-\alpha)(1+\alpha)^n] = \frac{1}{\alpha} \left[\frac{(1+\alpha)^n}{2^n} - \frac{(1-\alpha)^n}{2^n} \right].$$

□
