

TENTAMEN TERMODYNAMIK SI1121/SI1122

Torsdag 191219 kl. 14.00-19.00

Skriv på varje sida Namn och problemnummer

Motivera noga Otillräckliga motiveringar leder till poängavdrag

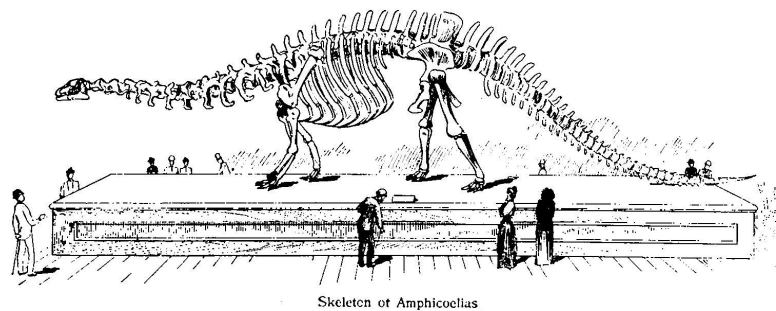
Hjälpmedel Formelblad i termodynamik, miniräknare

Examinator Mats Wallin tel 073 765 2000

OBS: skriv endast på inlämningssidornas framsidor.

**DEL 1: PÅ FRÅGA 1-6 SKA ENDAST SVAR GES. 1 p per problem.
GE SAMTLIGA SVAR TILL DEL 1 PÅ EN INLÄMNINGSSIDA.**

1. Bilden visar ett dinosaurskelett. Uppskatta dinosauriens totala vikt när den levde.



2. En planet rör sig i en bana runt solen. Totala energin ges av $E = \frac{1}{2}mv^2 - k/r$ där m är planetmassan, v planetens hastighet i förhållande till solen, k en konstant, och r är avståndet till solen. Använd dimensionsanalys för att bestämma sambandet mellan periodtiden (dvs tiden för att röra sig ett helt varv) och planetens medelavstånd till solen.

3. En tankbil lastar 50.0 m^3 dieselolja. Vid en senare tidpunkt när tankbilen töms har dieseloljans temperaturen sjunkit med 20°C . Volymsutvidgningskoefficient för dieselolja är $\alpha_V = 9.5 \cdot 10^{-4}/\text{K}$ och för stålet i tanken är $\alpha_V = 33 \cdot 10^{-6}/\text{K}$. Vilken volym har dieseloljan när tanken töms?

4. En propeller i ett vattenbad drivs av en vikt med massan 0.6 kg som faller 50.0 meter. Vikten är fäst i ett snöre som snurrar propelleraxeln när vikten faller. Vattnets volym är 0.75 liter och starttemperatur 20°C . Till vilken temperatur kan vattnet maximalt värmas av propellerns rörelse?

5. I ett rum med temperaturen 20°C finns ett frysskåp med en 100 W kompressor. Temperaturen i frysskåpet är -20°C . Hur mycket värme kan maximalt bortföras från frysen på 10 minuter?

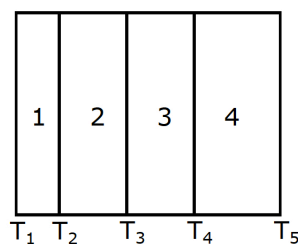
6. Antag att du vill frysa 4.5 gram vatten till is under en natt med klar himmel genom vattnets avsvälning på grund av emission av värmestrålning med följande metod. Vattnet hålls ut på ett isolerande underlag så att det enda energiytbytet mot omgivningen sker genom strålning från vattenytan vars area är $A = 9.0\text{ cm}^2$. Vattnets initialtemperatur är 6°C . Antag att vattnet strålar som en svartkropp med emissivitet $\epsilon = 0.90$. Antag vidare att natthimlen strålar som en svartkropp med temperaturen -23°C . Bestäm hur lång tid det tar för vattnet att frysa till is.

DEL 2: FULLSTÄNDIG LÖSNING SKA GES. 4 p per problem.

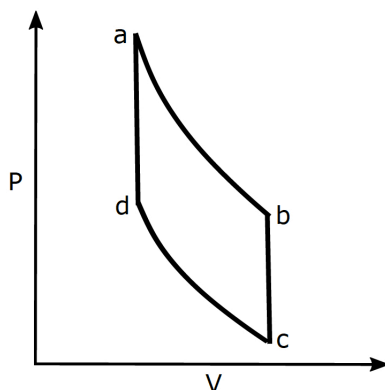
7. Jordens radie kan uppskattas på följande sätt. Ligg ner på stranden och observera solnedgången över havet. Vid tiden då solen försvinner nedanför horisonten ställer du dig upp så att solen syns igen vid horisonten. Starta ett tidtagarur. Antag att dina ögon är 1.70 meter högre upp vid stående ställning än vid liggande. En andra solnedgång observeras när tidtagaruret visar 10 sekunder. Bestäm jordradien ur dessa uppgifter.

8. En kopparbit som väger 75 gram och har initialtemperaturen 312°C placeras i en glasbehållare som innehåller 220 gram vatten. Glasbehållarens vikt (utan vatten) är 250 gram . Vattnet och glasbehållarens initialtemperatur är 12°C . Specifika värmekapaciteter i $\text{J kg}^{-1}\text{ K}^{-1}$: koppar 386, vatten 4190, och glas 840. Antag att glasbehållare, vatten och koppar tillsammans utgör ett slutet system. Vad blir sluttemperaturen?

9. En vägg består av fyra lager, se figuren. Värmeledningsförmågan hos lager 1 är λ_1 och $\lambda_4 = 5.0\lambda_1$ hos lager 4. Lager 1 har tjockleken d_1 och lager 4 har $d_4 = 2.0d_1$. De två mittersta lagren har samma tjocklek och värmeledningsförmåga men värdena hos både tjocklek och värmeledningsförmåga är okänd. Antag att steady state råder, dvs värmeflödet genom väggen ändras inte med tiden. Antag vidare att följande temperaturer är kända: $T_1 = 25^{\circ}\text{C}$, $T_2 = 20^{\circ}\text{C}$, $T_5 = -10^{\circ}\text{C}$, där T_1 är innerväggens temperatur, T_5 ytterväggens temperatur, T_2 är temperaturen vid gränsen mellan lager 1-2, osv. Bestäm (a) T_4 , (b) T_3 .



10. En ideal Stirlingmotor innehåller $8.10 \cdot 10^{-3}$ mol monoatomär ideal gas och arbetar mellan reservoarer med temperaturerna 24°C och 95°C . Gasens volym fördubblas under expansionsprocessen. Bestäm entropiändringarna hos gasen i de fyra olika delprocesserna i en cykel. Se figuren nedan.



11. Beräkna temperaturändringen hos 15.0 cm^3 kvicksilver med $C_P = 28.6 \text{ J/K}$ och initialtemperatur 0°C vid en isentropisk tryckökning från noll till 1000 atm ($1 \text{ atm} = 101325 \text{ Pa}$). Under processen varierar kvicksilvers volymsexpansionskoefficient från $\alpha_V = 181 \cdot 10^{-6}$ till $174 \cdot 10^{-6} \text{ K}^{-1}$.

Ledning: Skriv entropin som $S(T, P)$ och studera TdS . Man får (utan härledning) använda en sk Maxwellrelation:

$$\left(\frac{\partial S}{\partial P}\right)_T = -\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P$$

LYCKA TILL!

FORMELBLAD I TERMODYNAMIK

Boltzmanns konstant	$k = 1.380 \cdot 10^{-23} \text{ J/K}$
Gaskonstanten	$R = 8.314 \text{ J/(K mol)}$
Plancks konstant	$h = 6.626 \cdot 10^{-34} \text{ Js}$
Ljushastigheten	$c = 3.00 \cdot 10^8 \text{ m/s}$
Avogadros konstant	$N_A = 6.022 \cdot 10^{23} \text{ 1/mol}$
Atomära massenheten	$u = 1.660 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$
Atommassor m/u	H: 1, He: 4, C: 12, N: 14, O: 16, Ar: 40
Luft	ca 80% N ₂ och 20% O ₂
Stefan-Boltzmanns konstant	$\sigma = 5.670 \cdot 10^{-8} \text{ W/m}^2 \text{ K}^4$
Solarkonstanten	$\varphi = 1.4 \text{ kW/m}^2$
Värmekapacitet för vatten vid 15°C	$c = 4.19 \text{ kJ/K kg}$
Förångningsentalpi vatten 100°C, 1 atm	2260 kJ/kg
Värmekapacitet för is vid -4 °C	$c = 2.2 \text{ kJ/K kg}$
Smältentalpi för is	333 kJ/kg
Pris för hushållsel inklusive skatt	1 kr/kWh
Människa effekt: vila/promenad/löpning	1/2/5 W/kg
Cirkelns omkrets och area	$2\pi R$ och πR^2
Sfärens area och volym	$4\pi R^2$ och $4\pi R^3/3$
Logaritmer	$\ln ab = \ln a + \ln b, \ln a/b = \ln a - \ln b$ $d \ln x / dx = 1/x, \int 1/x dx = \ln x$
Kinetisk energi	$E_K = U = (1/2)mv^2$
Gravitationell potentiell energi	$E_P = mgh, g = 9.8 \text{ m/s}^2$
Tryck	$P = F/A$
Arbete	$dW = -PdV$
Ideal gas	$PV = NkT = nRT$
Monoatomär ideal gas	$U = (3/2)NkT$
Diatomär ideal gas	$U = (5/2)NkT$
Van der Waals tillståndsekvation	$P = NkT/(V - Nb) - a(N/V)^2$
Van der Waals tillståndsekvation	$(P + a_0/v^2)(v - b_0) = RT, a_0 = aN_A^2, b_0 = bN_A$
Isoterm kompressibilitet	$\kappa = -(1/V)(\partial V/\partial P)_T$
Isobar volymutvidgningskoefficient	$\alpha_V = (1/V)(\partial V/\partial T)_P$
Boltzmannfördelningen	$n_i = \text{konstant} \cdot \exp(-E_i/kT)$
Maxwell-Boltzmanns hastighetsfördelning	$f(v) = 4\pi(m/2\pi kT)^{3/2}v^2 \exp(-mv^2/2kT)$
MB fördelning av hastighetskomponent	$f_x(v_x) = \sqrt{m/2\pi kT} \exp(-mv_x^2/2kT)$
Medelhastighet	$\langle v \rangle = \sqrt{8kT/m\pi}$
Medelkvadrathastighet	$\langle v^2 \rangle = 3kT/m$
Mest sannolika hastighet	$v_p = \sqrt{2kT/m}$
Kollisionstid	$\tau = 1/(n\pi d^2\sqrt{2}\langle v \rangle)$
Medelfri väg	$l = \langle v \rangle \tau = 1/(n\pi d^2\sqrt{2})$
Stöttal	$v^* = P/\sqrt{2\pi mkT}$
Värmefflöde	$\Phi = \Delta Q/\Delta t$
Värmefflödestäthet	$\varphi = \Phi/A = u(T)c/4$
Plancks strålningslag	$u(f, T) = (8\pi hf^3/c^3)/[\exp(hf/kT) - 1]$
Wiens förskjutningslag	$hf_{\max}/kT = 2.821, T\lambda_{\max} = 2.898 \cdot 10^{-3} \text{ m K}$
Stefan-Boltzmanns lag	$\varphi = \sigma T^4$

Fouriers lag	$\Phi = -\lambda A \Delta T / \Delta x$
Värmeöverföring	$\Phi = \alpha A (T_1 - T_2)$
U-värde	$1/U = 1/\alpha + \Delta x / \lambda$
Första huvudsatsen	$dU = dQ + dW$
Isokor värmekapacitet	$C_V = (\partial Q / \partial T)_V = (\partial U / \partial T)_V$
Isobar värmekapacitet	$C_P = (\partial Q / \partial T)_P = (\partial H / \partial T)_P$
En mol ideal gas	$c_P = c_V + R$
Adiabat	$PV^\gamma = \text{konstant}, \gamma = C_P / C_V$
Adiabat	$TV^{\gamma-1} = \text{konstant}, TP^{(1-\gamma)/\gamma} = \text{konstant}$
Adiabatiskt arbete	$W = (P_2 V_2 - P_1 V_1) / (\gamma - 1)$
Carnotprocess	$Q_1 / Q_2 = T_1 / T_2$
Verkningsgrad värmemaskin	$\eta = W / Q_1$
Kylfaktor	$\varepsilon = Q_2 / W$
Värmefaktor	$\varepsilon_v = Q_1 / W$
Entropi	$S = k \ln \Omega$
Kvasistatisk värmeöverföring	$dQ = T dS$
Entalpi	$H = U + PV$
Helmholtz fria energi	$F = U - TS$
Gibbs fria energi	$G = F + PV$

TENTAMEN TERMODYNAMIK SI1121/SI1122 191219

LÖSNINGSSKISSER

1. Genom att jämföra skelettets storlek med människorna i bilden uppskattas dinosauriens volym med en cylinder med höjd $h = 10$ m och radie $r = 1$ m. Antag att densiteten är av samma storleksordning som vatten dvs $\rho = 10^3$ kg/m³. Detta ger massan

$$m \approx \rho \pi r^2 h = 10^3 \cdot \pi \cdot 1^2 \cdot 10 \approx 3 \cdot 10^4 \text{ kg}$$

SVAR: $m \approx 3 \cdot 10^4$ kg

2. Låt R vara medelavståndet från solen och T periodtiden. Ansätt $T = dm^a k^b R^c$. Dimensionsanalys:

$$[E] = \frac{1}{2}[mv^2] = [m(R/T)^2] = [k/r] = [k/R] \Rightarrow [T^2] = [m^{2a} k^{2b} R^{2c}] = [mR^3/k]$$

Detta ger $c = 3/2$.

SVAR: $T \propto R^{3/2}$

Kommentarer: 1. Resultatet motsvarar Keplers tredje lag. 2. I gravitationslagen är $k = GmM$ där G är gravitationskonstanten, m planetmassan och M solmassan. Alltså blir $T^2 \propto R^3/(GM)$ oberoende av m .

3. Eftersom volymsändringen är liten är det en bra approximation att sätta $(\partial V/\partial T)_P = V\alpha_V$ lika med en konstant vilket ger

$$\Delta V = \int \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_P dT = \int V\alpha_V dT = V\alpha_V \Delta T = 50.0 \cdot 9.5 \cdot 10^{-4} \cdot (-20) = -0.95 \text{ m}^3$$

Volymen vid tömningen blir

$$50.0 - 0.95 = 49.05 \text{ m}^3$$

SVAR: 49.0 m^3

Kommentar: Behållarens volymsändring ingår inte i lösningen.

4. Maximal tillförd värme till vattnet är lika med arbetet från propellern på vattnet, som i sin tur är lika med den potentiella energin hos vikten innan fallet:

$$Q = mgh = 0.6 \cdot 9.8 \cdot 50.0 = 294 \text{ J}$$

Mha $C = mc = dQ/dT$ fås ökningen hos vattentemperaturen med

$$\Delta T = \frac{Q}{mc} = \frac{294}{0.75 \cdot 4190} = 0.09 \text{ K}$$

SVAR: Sluttemperatur 20.1°C .

5. Arbetet är effekten gånger tiden:

$$W = Pt$$

Kylfaktorn är bortförd värme genom arbete:

$$\varepsilon = \frac{Q_2}{W}$$

Carnotprocessen ger maximal kylfaktor:

$$\varepsilon = \frac{T_2}{T_1 - T_2}$$

Detta ger den bortförda värmen

$$Q_2 = Pt \frac{T_2}{T_1 - T_2} = 100 \cdot 600 \cdot \frac{273 - 20}{40} = 3.8 \cdot 10^5 \text{ J}$$

SVAR: $3.8 \cdot 10^5 \text{ J}$

6. Bestäm först värmen som behöver föras bort från vattnet för att det ska frysa till is:

$$\Delta Q = mc\Delta T - mL = 4.5 \cdot (4.19 \cdot (-6) - 333) = -1611.63 \text{ J}$$

Nettoflödet av värme till vattnet ges av Stefan-Boltzmanns lag på formen

$$\Phi = \frac{dQ}{dt} = A\epsilon\sigma(T_s^4 - T^4)$$

där $T_s = 273 - 23 = 250 \text{ K}$ är natthimlens temperatur och T är vattnets temperatur. Eftersom vattnets temperatur ändras mycket lite under processen kan vi sätta högerledet i relationen ovan till en konstant med T som vattnets frystemperatur $T = 273 \text{ K}$. Detta ger

$$\Delta t = \frac{\Delta Q}{A\epsilon\sigma(T_s^4 - T^4)}$$

Numeriskt:

$$\Delta t = \frac{-1611.63}{9.0 \cdot 10^{-4} \cdot 0.90 \cdot 5.670 \cdot 10^{-8} \cdot (250^4 - 273^4)} = 2.13 \cdot 10^4 \text{ s} = 5.9 \text{ h}$$

SVAR: 5.9 h

Kommentar: En natt räcker för att frysa vattnet enligt denna beräkning.

7. Börja med att bestämma vinkeln θ i figuren nedan. Eftersom solen går ner en gång per dygn blir solens vinkelhastighet $d\theta/dt = 2\pi/(\text{ett dygn})$. Vinkeln θ är vinkelhastigheten gånger tiden mellan de två solnedgångarna:

$$\theta = 2\pi \cdot \frac{10}{24 \cdot 3600} = 0.000727$$

dvs vinkeln är mycket liten.

Radien fås ur figuren så här:

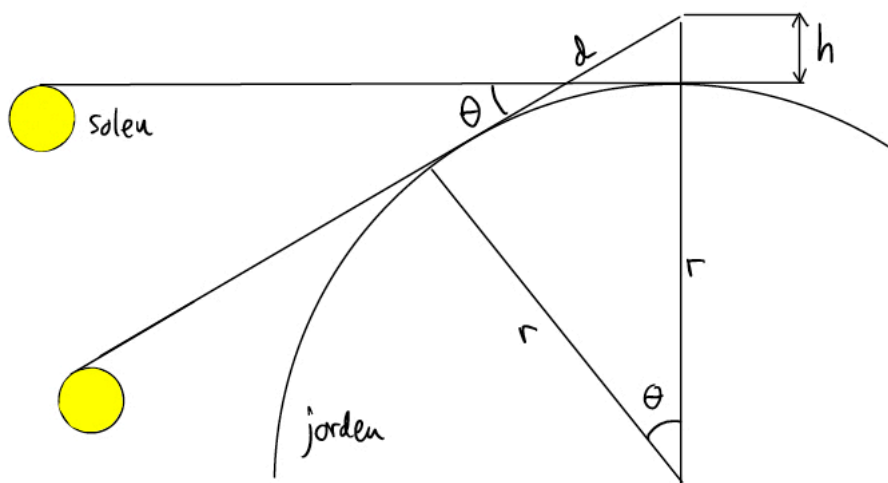
$$\cos \theta = \frac{r}{r+h} \Rightarrow r = \frac{h \cos \theta}{1 - \cos \theta} = 6429042 \text{ m} \approx 6400 \text{ km}$$

Eftersom $\theta \ll 1, h \ll r$ så kan beräkningen ovan förenklas:

$$\cos \theta \approx 1 - \theta^2/2, \frac{r}{r+h} = 1 - \frac{h}{r+h} \approx 1 - \frac{h}{r} \Rightarrow$$

$$r \approx \frac{2h}{\theta^2} = 6429048 \text{ m} \approx 6400 \text{ km}$$

Etablerad medelradie är 6371 km.



8. Värmeändringen ges av $Q = C\Delta T$. Beräkna först värmekapaciteterna $C = mc$:

$$C_{\text{Cu}} = 0.075 \cdot 386 = 28.95 \text{ J/K}$$

$$C_{\text{vatten}} = 0.220 \cdot 4190 = 921.8 \text{ J/K}$$

$$C_{\text{glas}} = 0.250 \cdot 840 = 210 \text{ J/K}$$

Starttemperaturerna är

$$T_{\text{Cu}} = 273 + 312 = 585 \text{ K}$$

$$T_{\text{vatten}} = T_{\text{glas}} = 273 + 12 = 285 \text{ K}$$

Sluttemperaturen T söks. Eftersom totala energin bevaras måste summan av värmeändringarna i koppar, vatten och glasbehållaren bli noll:

$$C_{\text{Cu}}(T - T_{\text{Cu}}) + C_{\text{vatten}}(T - T_{\text{vatten}}) + C_{\text{glas}}(T - T_{\text{glas}}) = 0$$

$$T = \frac{C_{\text{Cu}}T_{\text{Cu}} + C_{\text{vatten}}T_{\text{vatten}} + C_{\text{glas}}T_{\text{glas}}}{C_{\text{Cu}} + C_{\text{vatten}} + C_{\text{glas}}} = 292.5 \text{ K} = 19.5^\circ\text{C}$$

9. Använd Fouriers lag $\Phi = -\lambda A \Delta T / \Delta x$. Vid ett stabilt tillstånd är värmeflödet genom alla gränssytor lika stort.

(a) Värmeflödet blir

$$\Phi = -\lambda_1 A (T_2 - T_1) / d_1 = -\lambda_4 A (T_5 - T_4) / d_4$$

Förenkla:

$$\frac{d_4}{d_1} (T_1 - T_2) = \frac{\lambda_4}{\lambda_1} (T_4 - T_5)$$

$$2.0 \cdot (T_1 - T_2) = 5.0 \cdot (T_4 - T_5)$$

$$T_4 = T_5 + 2.0 \cdot (T_1 - T_2) / 5.0 = -10 + 2.0 \cdot (25 - 20) / 5.0 = -8.0^\circ\text{C}$$

(b) Pss fås

$$\Phi = -\lambda_2 A (T_3 - T_2) / d_2 = -\lambda_3 A (T_4 - T_3) / d_3$$

Mha $\lambda_2 = \lambda_3$, $d_2 = d_3$ fås

$$T_3 - T_2 = T_4 - T_3$$
$$T_3 = \frac{T_2 + T_4}{2} = \frac{20 - 8.0}{2} = 6.0^\circ\text{C}$$

dvs medelvärde av T_2 och T_4 vilket kan inses direkt av symmetriskäl.

10. Reservoirtemperaturerna är $T_1 = 273 + 95 = 368$ K och $T_2 = 273 + 24 = 297$ K. Volymerna är $V_a = V_d, V_b = V_c = 2V_a$.

Bestäm först arbetet under isoterma ab:

$$W_{ab} = \int_a^b P dV = nRT_1 \int_{V_a}^{V_b} \frac{dV}{V} = nRT_1 \ln V_b/V_a = nRT_1 \ln 2$$

$$= 8.10 \cdot 10^{-3} \cdot 8.314 \cdot 368 \cdot \ln 2 = 17.2 \text{ J}$$

Pss fås för cd:

$$W_{cd} = nRT_2 \ln V_d/V_c = -nRT_2 \ln 2 = -8.10 \cdot 10^{-3} \cdot 8.314 \cdot 297 \cdot \ln 2 = -13.9 \text{ J}$$

Vid isoterma processer är arbetet lika med den tillförda värmen. Detta ger $Q_{ab} = W_{ab}, Q_{cd} = W_{cd}$. Mha $\Delta Q = T\Delta S$ blir nu

$$\Delta S_{ab} = \frac{\Delta Q_{ab}}{T_1} = nR \ln 2 = 0.047 \text{ J/K}$$

och

$$\Delta S_{cd} = \frac{\Delta Q_{cd}}{T_2} = -\Delta S_{ab}$$

Alternativ lösning för ab och cd: Vid konstant temperatur är antalet tillgängliga tillstånd $\Omega = \text{konstant} \cdot V^N \Rightarrow S = k \ln \Omega = Nk \ln V + \text{konstant}$ där $Nk = nR$. Detta ger $\Delta S_{ab} = nR(\ln 2V - \ln V) = nR \ln 2 = -S_{cd}$.

Studera till sist de isokora processerna. Vid isokora processer utförs inget arbete. För en monoatomär ideal gas är $C_V = (\partial Q/\partial T)_V = \frac{3}{2}nR \Rightarrow dQ = \frac{3}{2}nRdT = TdS$. Detta ger

$$\Delta S_{bc} = \int_b^c \frac{dQ}{T} = \frac{3}{2}nR \int_{T_1}^{T_2} \frac{dT}{T} = \frac{3}{2}nR \ln \frac{T_2}{T_1} = -0.022 \text{ J/K}$$

För da blir

$$\Delta S_{da} = \frac{3}{2}nR \ln \frac{T_1}{T_2} = -\Delta S_{bc}$$

SVAR: $\Delta S_{ab} = -\Delta S_{cd} = 0.047 \text{ J/K}, \Delta S_{da} = -\Delta S_{bc} = 0.022 \text{ J/K},$

Notera att under en hel cykel blir nettoändringen i entropi $\Delta S_{ab} + \Delta S_{bc} + \Delta S_{cd} + \Delta S_{da} = 0$, som den måste eftersom S är en tillståndsvariabel.

11. Som funktion av T, P fås

$$dS = \left(\frac{\partial S}{\partial T} \right)_P dT + \left(\frac{\partial S}{\partial P} \right)_T dP$$

vilket ger

$$TdS = T \left(\frac{\partial S}{\partial T} \right)_P dT + T \left(\frac{\partial S}{\partial P} \right)_T dP$$

Använd nu $dQ = TdS$ och Maxwellrelationen

$$\left(\frac{\partial S}{\partial P} \right)_T = - \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_P = -V\alpha_V$$

där $\alpha_V = \frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_P$ är volymsutvidgningskoefficienten. Detta ger

$$TdS = C_P dT - TV\alpha_V dP$$

För en isentropisk process är $dS = 0$ vilket ger

$$dT = \frac{TV\alpha_V}{C_P} dP$$

Eftersom temperaturen är nästan konstant under processen sätter vi den till en konstant i uttrycket ovan: $T = 273$ K. Pss är volymsutvidgningskoefficienten nästan konstant och vi väljer medelvärdet: $\alpha_V = 177.5 \cdot 10^{-6} \text{ K}^{-1}$. Detta ger

$$\Delta T = \frac{TV\alpha_V}{C_P} \Delta P = \frac{273 \cdot 15.0 \cdot 10^{-6} \cdot 177.5 \cdot 10^{-6}}{28.6} \cdot 1000 \cdot 101325 = 2.58 \text{ K}$$

Kommentar: Maxwellrelationer ingår i mer avancerade termodynamikkurser. Härleds så här:

$$dG(P, T) = VdP - SdT = \left(\frac{\partial G}{\partial P} \right)_T dP + \left(\frac{\partial G}{\partial T} \right)_P dT \Rightarrow$$

$$V = \left(\frac{\partial G}{\partial P} \right)_T, S = - \left(\frac{\partial G}{\partial T} \right)_P$$

Andraderivatan:

$$\left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_P = \frac{\partial}{\partial T} \frac{\partial G}{\partial P} = \frac{\partial}{\partial P} \frac{\partial G}{\partial T} = - \left(\frac{\partial S}{\partial P} \right)_T$$

I mittersta likheten har vi använt ett resultat från flervariabelanalysen: ordningen på deriveringarna kan bytas i den partiella andraderivatan.