



SF1672 (SF1604) Linjär Algebra
Tentamen
Torsdagen 11 januari, 2018

Skrivtid: 8:00-13:00

Tillåtna hjälpmedel: inga

Examinator: Roy Skjelnes

Tentamen består av två delar; A och B, som vardera ger maximalt 20 poäng. Erhållna bonuspoäng adderas till del A såvitt inte totalsumman på del A överstiger 20 poäng.

Preliminära betygsgränser är

Betyg	A	B	C	D	E	Fx
Poäng	32	28	24	20	18	17

DEL A

1. Det finns ett unikt plan $H \subset \mathbb{R}^3$ som innehåller linjerna

$$\ell = \left\{ \begin{bmatrix} t \\ -t \\ 2t \end{bmatrix} \mid \text{skalärer } t \right\} \quad \text{och} \quad \ell' = \left\{ \begin{bmatrix} 2-t \\ t \\ 2-2t \end{bmatrix} \mid \text{skalärer } t \right\}.$$

- (a) Bestäm en ekvation för planet H . (2 p)
- (b) Bestäm avståndet mellan linjerna ℓ och ℓ' . (2 p)
- (c) Bestäm en bas för det ortogonala komplementet till ℓ . (2 p)

2. Vi har en linjär avbildning $T: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ var matrisrepresentation med avseende på standardbasen ges av matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -16 & 14 \\ 1 & -1 & -16 & 14 \\ 1 & -1 & 8 & -10 \\ 1 & -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

- (a) Bestäm en bas för bildrummet till T . (2 p)
- (b) Bestäm dimensionen till nollrummet till T . (2 p)
- (c) Bestäm alla egenvektorer med egenvärde -2. (2 p)
- (d) Ett egenvärde till A är 8. Bestäm det karakteristiska polynomet till A . (2 p)

3. Linjen L ges av ekvationen $2x - 3y = 0$. Låt $T_1: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ vara speglingen om linjen L , och låt $T_2: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ vara projektionen ned på linjen L .
- (a) Bestäm standardmatrisen till $T_2 \circ T_1$. **(3 p)**
- (b) Linjen $x - y = 0$ speglas via avbildningen T_1 till en linje ℓ . Bestäm en ekvation för linjen ℓ . **(3 p)**

DEL B

4. Vektorrummet av (2×2) -matriser ges strukturen av ett inreproduktum vid

$$\left\langle \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} \right\rangle = ax + by + cz + dw.$$

Delmängden $\mathbb{C}$ av matriser på formen $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ med reella tal a, b , är ett delrum. Bestäm vektorn X i $\mathbb{C}$ som är närmast $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$. **(4 p)**

5. Vi har matriserna

$$A = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 4 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{och} \quad X = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Iterationer av matrisen A beskriver en Markovkedja. Det vill säga att utfallet F_n vid tiden n ges av AF_{n-1} för varje heltal $n \geq 1$, och där F_0 är startvärdet. Matrisen A har karakteristisk polynom $(\lambda - 1)(\lambda + \frac{1}{2})^2(\lambda - \frac{1}{4})$. Bestäm startvärdet F_0 när $F_{20} = X$. **(6 p)**

6. Låt M vara (9×9) -matris där varje rad och varje kolumn innehåller (alla) siffrorna $\{1, \dots, 9\}$. Visa att $9 \cdot 45$ är en delare av $\det(M)$. **(4 p)**
7. Låt V vara ett (ändligt dimensionellt) vektorrum. Det duala rummet V^* är vektorrummet av linjära avbildningar $f: V \rightarrow \mathbb{R}$. Låt $F: W \rightarrow V$ vara en linjär avbildning mellan vektorrum. Detta ger en inducerad linjär avbildning $F^*: V^* \rightarrow W^*$ vid sammansättning, d.v.s. $F^*(f) = f \circ F$. Visa att om nollrummet till $F: W \rightarrow V$ är nollvektorn, då är bildrummet till F^* hela W^* . **(6 p)**