



SF1681 Linjär algebra, fk
Tentamen
21 april 2022

Skrivtid: 8:00–13:00

Tillåtna hjälpmedel: inga

Examinator: David Rydh

Tentamen består av nio uppgifter som vardera ger maximalt fyra poäng. Del I utgörs av de tre första uppgifterna som testar förmågan att lösa grundläggande problem. Del II utgörs av de två följande uppgifterna och testar begreppsförståelse och kunskap om satser och samband. De fyra sista uppgifterna utgör del III och testar förmågan att lösa mer avancerade problem och är avsedda främst för högre betyg. Bonuspoäng av typ I adderas till erhållna poäng på del I och bonuspoäng av typ II adderas till erhållna poäng på del II. Det går dock inte att få mer än 12 respektive 8 poäng på dessa delar. Betygsgränserna vid tentamen kommer preliminärt att ges av följande tabell där kolumnerna anger poänggräns för respektive del/hela skrivningen.

Del	Poäng	Innehåll	Fx	E	D	C	B	A
I	12	Grundläggande problem	-	-	-	-	-	-
II	8	Begrepp och satser	4	4	4	6	6	6
III	16	Avancerade problem	-	-	-	-	-	-
hela	36		11	12	18	22	26	30

Till exempel krävs för betyg C minst 22 poäng totalt varav 6 poäng på del II.

För full poäng på en uppgift krävs att lösningen är väl presenterad och lätt att följa. Det innebär speciellt att införda beteckningar ska definieras, att den logiska strukturen tydligt beskrivs i ord eller symboler och att resonemangen är väl motiverade och tydligt förklarade. Lösningar som allvarligt brister i dessa avseenden bedöms med högst två poäng.

DEL I – GRUNDLÄGGANDE PROBLEM

- Låt $V = \mathbb{C}[x]$ vara vektorrummet av polynom med komplexa koefficienter. Låt $L: V \rightarrow V$ vara operatoren som ges av $L(p(x)) = (x-1)(p(x) + p(-x))$.
 - Bestäm en bas för kärnan $\ker L$ och en bas för bilden $\operatorname{im} L$. **(2 p)**
 - Är V en inre direkt summa av $\ker L$ och $\operatorname{im} L$? **(2 p)**
- Låt $V = \mathbb{C}[x]_{\leq 4}$ vara vektorrummet av polynom av grad ≤ 4 med komplexa koefficienter. Ge V den inre produkten $\langle p(x)|q(x) \rangle = \overline{p(0)}q(0) + \overline{p'(0)}q'(0) + \cdots + \overline{p^{(4)}(0)}q^{(4)}(0)$. Bestäm alla $a, b \in \mathbb{C}$ sådana att operatoren $L: V \rightarrow V$, som ges av $L(p(x)) = p(ax+b)$, är självadjungerad. **(4 p)**
- Betrakta den komplexa matrisen $A = \begin{bmatrix} 1 & i & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.
 - Bestäm singularvärdena till A . **(2 p)**
 - Bestäm höger- och vänstersingularvektorer till det största singularvärdet. **(2 p)**

DEL II – BEGREPP OCH SATSER

4. Låt V vara ett ändligtdimensionellt komplext inre produktrum och låt $W \subset V$ vara ett delrum.
- (a) Definiera det *ortogonala komplementet* $W^\perp$. (1 p)
 - (b) Givet en ortonormal bas $\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_r$ för W , ge en formel för den *ortogonala projektionen* på W . (1 p)
 - (c) Visa att $V = W \oplus W^\perp$ är en inre direkt summa. (1 p)
 - (d) Ge ett exempel på ett vektorrum V , ett delrum W och två inre produkter på V som ger olika ortogonala komplement $W^\perp$. (1 p)
5. Låt V vara ett ändligtdimensionellt vektorrum och låt S och T vara operatorer på V .
- (a) Vad innebär det att S och T *kommuterar* och vad innebär det att de är *samtidigt diagonaliserbara*? (1 p)
 - (b) Vilket/vilka samband gäller mellan egenskaperna i (a)? (1 p)
 - (c) Visa att om V är ett komplext inre produktrum och S och T är kommuterande och *självadjungerade* så finns en *ortonormal* bas till V bestående av egenvektorer till både S och T . (2 p)
-

DEL III – AVANCERADE PROBLEM

6. Låt n vara ett positivt heltal. Låt $V = \mathbb{C}[x]_{\leq n}$ vara vektorrummet av komplexa polynom av grad $\leq n$. Bestäm Jordans normalform till operatorn $L: V \rightarrow V$ som ges av $L(p(x)) = p(x+1) - p(x)$. (4 p)
7. Betrakta "Fibonacci" talföljd $x_1 = 1, x_2 = 1$ och $x_{n+2} = x_{n+1} + x_n$ för alla $n \geq 1$ men där talen $x_1, x_2, \dots$ tillhör den ändliga kroppen $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$. Vad är x_{2022} ? (4 p)
8. Låt A och B vara komplexa 2×2 -matriser. Antag att A har egenvärdena 0 och 1 och B har egenvärdena -3 och 3 . Bestäm alla möjliga egenvärden till $A + B$ om:
- (a) $AB = BA$, (1 p)
 - (b) A och B är godtyckliga, (2 p)
 - (c) A och B är Hermiteska. (1 p)
9. Låt $L: M_{n,n} \rightarrow M_{n,n}$ vara operatorn på vektorrummet av reella $n \times n$ -matriser som ges av $L(A) = A - A^T + \text{tr}(A)I$. Bestäm minimalpolynomet och det karakteristiska polynomet för L för varje positivt heltal n . (4 p)
-