



Lösningsförslag till tentamen
Torsdag den 22 december 2021

DEL I – GRUNDLÄGGANDE PROBLEM

1. (a) Definera vad som menas med att $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ är växande. (1 p)
(b) Låt

$$f(x) = \begin{cases} ce^x - 1 & -1 \leq x \leq 0 \\ -x^2 + d & 0 < x \leq 1 \end{cases}$$

- För vilka c och d är f kontinuerlig i $[-1, 1]$? (2 p)
(c) Låt $c = d = 1$. Är sådant f växande i $[-1, 1]$? (1 p)

Lösningsförslag. a) Kolla i häftet.

b) För varje c och d , $ce^x - 1$ och $-x^2 + d$ är kontinuerliga funktioner (som sammansättning av elementära funktioner). Därför, kontrollerar vi kontinuitet i 0, dvs, vi kontrollerar för vilka c och d vi har att

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x).$$

Vi har $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (ce^x - 1) = c - 1$, och $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (-x^2 + d) = d$. Därför: när $c - 1 = d$, då är f kontinuerlig i $[-1, 1]$.

c) När $c = d = 1$, för $x \in (0, 1)$, funktionen $f(x) = -x^2 + 1$ är avtagande för att derivatan är -1 dvs, negativt. Därför, f kan inte vara växande i $[-1, 1]$.

□

2. (a) Definera vad som menas med att a är en inflexionspunkt till funktion $g(x)$. **(1 p)**
 (b) Låt $g(x) = e^{\sin x}$, $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Undersök på vilka intervall $g(x)$ är konvex resp. konkav. Ange också eventuella inflexionspunkter. **(3 p)**

Lösningsförslag. a) Kolla i häftet.

b) Vi beräknar derivatan:

$$g'(x) = e^{\sin x} \cos x.$$

$$g''(x) = e^{\sin x} \cos^2 x + e^{\sin x} (-\sin x) = e^{\sin x} (\cos^2 x - \sin x) = e^{\sin x} (1 - \sin^2 x - \sin x).$$

För alla x , $e^{\sin x}$ är positiv, därför har vi att tecknet av g'' beror på tecknet av $1 - \sin^2 x - \sin x$. Låt $t = \sin x$. Kvadratisk ekvation $1 - t^2 - t = 0$ har två olika lösningar: $t_1 = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}$ och $t_2 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$, och $1 - t^2 - t$ är positiv i (t_1, t_2) och negativ i $(-\infty, t_1)$ och (t_2, ∞) . För att $\sin x \in [-1, 1]$ och $t_1 < -1 < t_2 < 1$, då har vi att $1 - \sin^2 x - \sin x$ är positiv för $\sin x \in (-1, t_2)$ och $1 - \sin^2 x - \sin x$ är negativ för $\sin x \in (t_2, 1)$. För $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ är $\sin x$ invertierbar, med inversen arcsin funktionen. Därför: $1 - \sin^2 x - \sin x$ är positiv för $x \in (-\frac{\pi}{2}, \arcsin(t_2))$ och $1 - \sin^2 x - \sin x$ är negativ för $\sin x \in (\arcsin(t_2), \frac{\pi}{2})$.

Svar: $g(x)$ har en inflexionspunkt i intervallet $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, den punkt är $c = \arcsin(\frac{-1+\sqrt{5}}{2})$.
 $g(x)$ är konvex i $(-\frac{\pi}{2}, c)$ och konkav i $(c, \frac{\pi}{2})$.

□

3. (a) Definera vad som menas med Maclaurinpolynomet $p_n(x)$ av funktion $f(x)$.

(1 p)

(b) Bestäm Maclaurinpolynomet $p_3(x)$ av funktion $f(x) = \ln(1 + 2x)$.

(1,5 p)

(c) Använd Maclaurinutvecklingar för att beräkna gränsvärdet

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + 2x) - 2x}{\sin(x^2)}.$$

(1,5 p)

Lösningsförslag. a) Kolla i häftet.

b)

$$f(x) = \ln(1 + 2x).$$

$$f'(x) = 2(1 + 2x)^{-1}.$$

$$f''(x) = -4(1 + 2x)^{-2}.$$

$$f'''(x) = 16(1 + 2x)^{-3}.$$

Därför: $f(0) = 0$, $f'(0) = 2$, $f''(0) = -4$, $f'''(0) = 16$. Så $p_3(x) = 2x - 2x^2 + \frac{8}{3}x^3$.

c)

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + 2x) - 2x}{\sin(x^2)} &= \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x - 2x^2 + \frac{8}{3}x^3 + O(x^4) - 2x}{\sin(x^2)} &= \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2x^2 + \frac{8}{3}x^3 + O(x^4)}{\sin(x^2)} &= \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2 + \frac{8}{3}x + O(x^2)}{\frac{\sin(x^2)}{x^2}} &= -2, \end{aligned}$$

där vi använder $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t} = 1$ och $\lim_{x \rightarrow 0} O(x^2) = 0$.

(Kom ihåg det $O(x^4)$ här betecknas en funktion sådant att $|O(x^4)| \leq M|x^4|$ för något positiv M och alla x i en omgivning av 0. Därför: $\frac{O(x^4)}{x^2} = O(x^2)$. Kolla på exempel 9.3 i häftet.) $\square$

4. (a) Om f är kontinuerlig funktion på intervallet $[a, \infty)$, vad menas med att integralen $\int_a^\infty f(x)dx$ konvergerar? (1 p)

- (b) Konvergerar eller divergerar den generaliserade integralen

$$\int_2^\infty \frac{dx}{(\sqrt{x}+1)\sqrt{x^2+2}} ?$$

(1,5 p)

- (c) Konvergerar eller divergerar den generaliserade integralen

$$\int_1^\infty \frac{e^{\frac{1}{\sqrt{x}}}}{\sqrt{x}} \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) dx ?$$

(1,5 p)

Lösningförslag. a) Kolla i häftet.

- b) Funktionen $f(x) = \frac{1}{(\sqrt{x}+1)\sqrt{x^2+2}}$ är positiv i intervallet $[2, \infty)$. Vi observerar att $\sqrt{x} + 1 \geq \sqrt{x}$ och $\sqrt{x^2+2} \geq x$ i intervallet $[2, \infty)$, därför

$$f(x) \leq \frac{1}{x\sqrt{x}} = x^{-\frac{3}{2}}.$$

Från satsen i häftet har vi att $\int_2^\infty x^{-\frac{3}{2}} dx$ konvergerar för att $\frac{3}{2} > 1$. Därför, enligt jämförelsesatsen, har vi att $\int_2^\infty f(x)dx$ är också konvergent.

- c) Här använder vi den andra jämförelse satsen som använder gränsvärde:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{e^{\frac{1}{\sqrt{x}}}}{\sqrt{x}} \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{\sqrt{x}} \frac{1}{x}} = 1,$$

där vi använder följande standard gränsvärden: $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\ln(1+t)}{t}$ (med $t = \frac{1}{x}$) och $\lim_{t \rightarrow 0} e^t = 1$ (med $t = \frac{1}{\sqrt{x}}$).

Som i del b, $\int_2^\infty \frac{1}{x\sqrt{x}} dx$ konvergerar, därför enligt jämförelsesatsen, $\int_1^\infty \frac{e^{\frac{1}{\sqrt{x}}}}{\sqrt{x}} \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) dx$ är också konvergent.

□

5. Bestäm den funktionskurva $y = f(x)$ som går genom punkten $(4, 6)$ och har följande egenskap: kurvans tangent i en godtycklig punkt $(a, f(a))$ skär x axeln i punkten $(-a, 0)$.

(4 p)

Lösningsförslag. Ekvation av tangent till funktionskurva $y = f(x)$ i punkt $(a, f(a))$ är:

$$f'(a)(x - a) = (y - f(a)).$$

Om punkten $(-a, 0)$ ligger på tangenten, detta betyder att när vi sätter $x = -a$ och $y = 0$ i tangentens ekvation, då har vi likhet:

$$f'(a)(-a - a) = (0 - f(a)).$$

Det följer att

$$2af'(a) = f(a).$$

Det är en separable differential ekvation som vi löser genom integration:

$$\frac{df}{f} = \frac{da}{2a}$$

$$\int \frac{df}{f} = \int \frac{da}{2a}$$

$$\ln |f| = \frac{1}{2} \ln |a| + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

Vi tar exponentialfunktion av både vänster och höger sidan av ekvation, så har vi:

$$|f| = |a|^{\frac{1}{2}} C_1, \quad C_1 = e^C \in (0, \infty)$$

detta betyder att

$$f(a) = |a|^{\frac{1}{2}} C_2, \quad C_2 = \pm C_1 \in \mathbb{R}$$

Vi också vet att funktionskurva passar genom punkten $(4, 6)$, dvs:

$$6 = f(4) = 4^{\frac{1}{2}} C_2 = 2C_2$$

vilken ger att $C_2 = 3$.

Svar: $f(x) = 3|x|^{\frac{1}{2}}$.

□

DEL II – AVANCERADE PROBLEM

6. (a) Formulera och bevisa Analysens huvudsats. (4 p)
 (b) Bestäm alla kontinuerliga funktioner y sådana att

$$y(x) = -2 + \int_0^x y(t) \cos(2t) dt.$$

(2 p)

Lösningförslag. a) Kolla i häftet.

b) Antag att $y(x) = -2 + \int_0^x y(t) \cos(2t) dt$. Vi tar derivatan av både vänster och höger sidan och så har vi:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx} \int_0^x y(t) \cos(2t) dt.$$

Enligt Analysens huvudsats:

$$\frac{d}{dx} \int_0^x y(t) \cos(2t) dt = y(x) \cos(2x).$$

Därför har vi differential ekvation: $\frac{dy}{dx} = y(x) \cos(2x)$, som är en separable differential ekvation. Vi skriver den i formen:

$$\frac{dy}{y} = \cos(2x) dx$$

och vi integrerar:

$$\int \frac{dy}{y} = \int \cos(2x) dx.$$

Därför:

$$\ln |y| = \frac{1}{2} \sin(2x) + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

Vi tar exponential funktion av både vänster och högre sidan:

$$|y| = e^{\frac{1}{2} \sin(2x)} C_1, \quad C_1 = e^C \in (0, \infty).$$

Därför

$$y(x) = e^{\frac{1}{2} \sin(2x)} C_2, \quad C_2 = \pm C_1 \in \mathbb{R}.$$

Från $y(x) = -2 + \int_0^x y(t) \cos(2t) dt$, vi ser att $y(0) = -2$ för att $\int_0^0 h(x) = 0$ för varje funktion h . Därför

$$-2 = y(0) = e^{\frac{1}{2} \sin(0)} C_2 = C_2.$$

Svar: $y(x) = -2e^{\frac{1}{2} \sin(2x)}.$

□

7. (a) Bevisa följande satsen:

Låt f vara kontinuerlig funktion. Om $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = L > 0$, det finns $\delta > 0$ sådant att $|f(x)| \leq 2L|x|$ för alla $x \in (-\delta, 0) \cup (0, \delta)$. (2 p)

(b) Funktion f definieras för alla reella tal av

$$f(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left(\cos \frac{t}{n} + \cos \frac{2t}{n} + \cdots + \cos \frac{nt}{n} \right).$$

Bevisa att f är en kontinuerlig funktion.

(4 p)

Lösningförslag. a) Enligt definition av en gränsvärde har vi att $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = L$ implicerar:

För varje $\varepsilon > 0$ det finns $\delta > 0$ sådant att för varje $x \in (-\delta, \delta) \setminus \{0\}$, $|\frac{f(x)}{x} - L| < \varepsilon$.

Sista olikheten implicerar: $|\frac{f(x)}{x} - L| < \varepsilon$ (enligt standard olikheten $||a| - |b|| \leq |a - b|$), som också implicerar $|\frac{|f(x)|}{|x|} - L| < \varepsilon$. Därför har vi

$$||f(x)| - L|x|| < \varepsilon|x|$$

, för att $|x| > 0$ (så kan vi multiplicera olikheten med $|x|$).

Nu väljer vi $\varepsilon = L$ och vi använder motsvarande δ . Så har vi: för alla $x \in (-\delta, \delta) \setminus \{0\}$,

$$0 \leq |f(x)| - L|x| \leq L|x|,$$

vilken implicerar att $|f(x)| \leq 2L|x|$.

b) För att visa att f är kontinuerlig, vi ska kolla på $f(t+h) - f(t)$ för valfri t och små h .

$$\begin{aligned} |f(t+h) - f(t)| &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \left| \cos \frac{k(t+h)}{n} - \cos \frac{kt}{n} \right| \\ &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \left| \cos \frac{kt}{n} \cos \frac{kh}{n} - \sin \frac{kt}{n} \sin \frac{kh}{n} - \cos \frac{kt}{n} \right| \\ &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \left| \cos \frac{kt}{n} (\cos \frac{kh}{n} - 1) - \sin \frac{kt}{n} \sin \frac{kh}{n} \right| \\ &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \left| \cos \frac{kt}{n} \left| \cos \frac{kh}{n} - 1 \right| + \left| \sin \frac{kt}{n} \right| \sin \frac{kh}{n} \right| \\ &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \left| \cos \frac{kh}{n} - 1 \right| + \left| \sin \frac{kh}{n} \right| \end{aligned}$$

Vi ska använda olikheterna $|\sin x| \leq |x|$, och $|\cos x - 1| \leq |x|$. Både två är enkelt att visa genom att skissa funktionerna $\sin x$, $1 - \cos x$, x . Man kan också visa olikheterna genom att kolla på derivatan. Till exempel, för $x > 0$, funktion $f(x) = x - (1 - \cos x)$ har derivatan $1 - \sin x$, som är alltid större eller lika med 0. Detta betyder att $f(x)$ är växande i $[0, \infty)$. För att $f(0) = 0$ och f är växande i $[0, \infty)$, det följas att $f(x) \geq 0$ i $[0, \infty)$. Detta betyder att $x - (1 - \cos x) \geq 0$ och så är $x \geq 1 - \cos x$. På samma sätt olikheten följer på $(-\infty, 0]$.

Därför har vi att

$$\begin{aligned}
 |f(t+h) - f(t)| &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \left| \frac{kh}{n} \right| + \left| \frac{kh}{n} \right| \\
 &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n 2 \frac{k|h|}{n} \\
 &\leq 2|h| \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n k \\
 &= 2|h| \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} \frac{n(n+1)}{2} = |h|.
 \end{aligned}$$

Så har vi att för varje t : $|f(t+h) - f(t)| \leq |h|$. Därför, för varje t , $\lim_{h \rightarrow 0} (f(t+h) - f(t)) = 0$, vilken betyder att f är kontinuerlig i punkten t . $\square$

8. (a) Bevisa att om $f(x)$ är kontinuerlig på $[a, b]$ och $f'(x) > 0$ på (a, b) så är f strängt växande på $[a, b]$. **(4 p)**
- (b) Visa med exempel att ingen av de två förutsättningarna i satsen i del (a) kan strykas. **(2 p)**

Lösningsförslag. a) Kolla i häftet.

b) Konstant funktion $g(x) = 1$ är exempel av kontinuerlig funktion som har derivatan som är INTE positiv, och g är växande men inte **strängt** växande. Detta exempel visar att förutsättningen $f'(x) > 0$ inte kan styrkas.

Låt $h(x) = x$, när $x \in (0, 1]$ och $h(0) = 1$. Då har vi att $h'(x) = 1 > 0$ för alla $x \in (0, 1]$, men h är inte kontinuerlig i 0 för att $\lim_{x \rightarrow 0^+} h(x) = 0 \neq h(0)$, och $h(x)$ är inte växande för att $0 < \frac{1}{2}$ men $h(0) = 1 > \frac{1}{2} = h(\frac{1}{2})$. Detta exempel visar att förutsättningen " $f(x)$ är kontinuerlig på $[a, b]$ " inte kan styrkas.

□