



**Lösningsförslag till tentamen
4 april 2024**

DEL I – GRUNDLÄGGANDE PROBLEM

1. För en inverterbar $n \times n$ -matris A kan vi definiera en avbildning

$$L_A: M_{n,n}(\mathbb{C}) \longrightarrow M_{n,n}(\mathbb{C})$$

genom $L_A(X) = AXA^{-1}$.

- (a) Visa att L_A är linjär. (1 p)
- (b) Visa att 1 är ett egenvärde för L_A för alla inverterbara matriser A . (1 p)
- (c) Bestäm den geometriska multipliciteten för egenvärdet 1 för L_A för matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}.$$

(2 p)

Lösningsförslag.

- (a) Vi har att $L_A(X+Y) = A(X+Y)A^{-1} = AXA^{-1} + AYA^{-1} = L_A(X) + L_A(Y)$ på grund av associativa och distributiva lagarna för matrismultiplikation. För en skalär k har vi att $L_A(kX) = A(kX)A^{-1} = kAXA^{-1} = kL_A(X)$ eftersom multiplikation med skalär kommuterar med matriser.
- (b) Vi har att $L_A(I) = AIA^{-1} = I$, så I är en egenvektor med egenvärde 1. Även A är en egenvektor med egenvärde 1 eftersom $L_A(A) = AAA^{-1} = A$.
- (c) Vi har att den geometriska multipliciteten är minst 2 eftersom $\{I, A\}$ är linjärt oberoende egenvektorer med egenvärde 1. En egenvektor med egenvärde 1 uppfyller $AXA^{-1} = X$, dvs $AX = XA$. Matrisen A är diagonaliserbar över $\mathbb{C}$ eftersom det karakteristiska polynomet $p_A(x) = x^2 - 2x + 5 = (x-1) + 4$ har två olika nollställen. Vi kan alltså diagonalisera A och ekvationen $AX = XA$ kommer att ges av $DY = YD$, dvs

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$$

som är ekvivalent med

$$(\lambda_1 - \lambda_2)y_{12} = (\lambda_1 - \lambda_2)y_{21} = 0.$$

Eftersom egenvärdena är olika är Lösningsskruumets dimension 2, vilket är den geometriska multipliciteten för egenvärdet 1.

2. Använd matriser för att bestämma lösningen till den linjära rekursionen

$$x_{n+2} = 2x_{n+1} - 5x_n, \quad n \geq 0$$

med begynnelsevärden $x_0 = 0, x_1 = 1$.

(4 p)

Lösningsförslag. Vi låter $\mathbf{y}_n = \begin{bmatrix} x_{n+1} \\ x_n \end{bmatrix}$ och skriver rekursionen som $\mathbf{y}_{n+1} = A\mathbf{y}_n$ där

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Det karakteristiska polynomet är $p_A(x) = x^2 - 2x + 5 = (x-1)^2 + 4 = (x-1-2i)(x-1+2i)$. Egenvärdena är $1 \pm 2i$

$$\boldsymbol{\xi}_1 = \begin{bmatrix} 1+2i \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\xi}_2 = \begin{bmatrix} 1-2i \\ 1 \end{bmatrix},$$

Vi kan uttrycka den allmänna lösningen som $\mathbf{y}_n = \alpha_1(1+2i)^n \boldsymbol{\xi}_1 + \alpha_2(1-2i)^n \boldsymbol{\xi}_2$, och vi bestämmer koefficienterna med begynnelsevillkoret

$$\begin{bmatrix} 1+2i & 1-2i \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

vilket ger

$$\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{4i} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Lösningen blir därmed $x_n = \frac{(1+2i)^n - (1-2i)^n}{4i}$.

Svar. $x_n = \frac{(1+2i)^n - (1-2i)^n}{4i}$, för $n \geq 0$.

3. Låt $V = \mathbb{R}^3$ och $W = V \oplus \mathbb{R}$. Den bilinjära avbildningen $\Phi: V \times V \rightarrow W$ som ges av kryssprodukt och skalärprodukt genom $\Phi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (\mathbf{x} \times \mathbf{y}, \mathbf{x} \cdot \mathbf{y})$ ger upphov till en linjär avbildning $L: V \otimes V \rightarrow W$.

(a) Bestäm rangen av L . (2 p)

(b) Bestäm en bas för $\ker L$. (2 p)

Lösningsförslag.

- (a) Dimensionen för $V \otimes V$ är $3 \cdot 3 = 9$ och dimensionen för W är $3 + 1 = 4$. Rang är 4 eftersom L är surjektiv. Detta kan vi se genom att se att $L(\mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_3) = (\mathbf{e}_1, 0)$, $L(\mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_1) = (\mathbf{e}_2, 0)$, $L(\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_2) = (\mathbf{e}_3, 0)$ och $L(\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1) = (0, 1)$.
- (b) Eftersom L har rang 4 är $\dim \ker L = 9 - 4 = 5$. Vi kan hitta fem linjärt oberoende element i kärnan genom

$$L(\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_3) = (0, 0)$$

$$L(\mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_3) = (0, 0)$$

$$L(\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_1) = (0, 0)$$

$$L(\mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_3 + \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_2) = (0, 0)$$

$$L(\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_3 + \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_1) = (0, 0)$$

Därmed är $\{\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_3 + \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_3 + \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_2\}$ en bas för $\ker L$.

Svar.

(a) $\text{rk}(L) = 4$.

(b) $\{\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_3 + \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_3 + \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_2\}$ en bas för $\ker L$.

DEL II – BEGREPP OCH SATSER

4. (a) Formulera *isomorfnisatsen* för linjära avbildningar $L: V \longrightarrow W$. (1 p)
(b) Använd isomorfnisatsen för att visa att $V/W \cong k^2$ om $V = k[x]$ och

$$W = \{x^2p(x) : p(x) \in k[x]\}.$$

- (1 p)
- (c) Bevisa isomorfnisatsen. (2 p)

Lösningförslag.

- (a) För en linjär avbildning $L: V \longrightarrow W$ gäller att $\text{im}(L) \cong V/\ker(L)$.
- (b) Vi bildar den linjära avbildningen $L: V \longrightarrow k^2$ genom $L(p(x)) = (p(0), p'(0))$, för $p(x) \in k[x]$. Kärnan för L är $\{p(x) : p(0) = p'(0) = 0\} = W$ och bildrummet är $\text{im}(L) = k^2$ eftersom $L(1) = (1, 0)$ och $L(x) = (0, 1)$. Alltså ger isomorfnisatsen att $V/W \cong k^2$.
- (c) Vi definierar en linjär avbildning $\Phi: V/\ker(L) \longrightarrow W$ genom $\Phi(\mathbf{x} + \ker(L)) = L(\mathbf{x})$. Detta är väldefinierat eftersom $\mathbf{x} + \ker(L) = \mathbf{y} + \ker(L)$ om och endast om $L(\mathbf{x}) = L(\mathbf{y})$. Den är linjär eftersom $\{\Phi(\mathbf{x} + \mathbf{y} + \ker(L)) = L(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = L(\mathbf{x}) + L(\mathbf{y}) = \Phi(\mathbf{x} + \ker(L)) + \Phi(\mathbf{y} + \ker(L))$ och $\Phi(a(\mathbf{x} + \ker(L))) = L(a\mathbf{x}) = aL(\mathbf{x}) = a\Phi(\mathbf{x} + \ker(L))$. Den är injektiv eftersom $\ker \Phi = \{\mathbf{x} + \ker(L) : L(\mathbf{x}) = 0\} = \{\ker(L)\}$ och bildrummet är $\text{im}(\Phi) = \{\Phi(\mathbf{x} + \ker(L)) : \mathbf{x} \in V\} = \{L(\mathbf{x}) : \mathbf{x} \in V\} = \text{im}(L)$. Alltså ger Φ en isomorfi mellan $V/\ker(L)$ och $\text{im}(L)$.

5. (a) Definiera begreppet *inre produkt* för ett komplext vektorrum. (1 p)
(b) Ge exempel på ett oändligdimensionellt inre produktrum. (1 p)
(c) Bevisa Cauchy-Schwartz olikhet för reella inre produktrum. (2 p)

Lösningsförslag.

- (a) En inre produkt på ett komplext vektorrum V är en positivt definit Hermitesk seskvi-linjär form $\langle \cdot | \cdot \rangle : V \times V \longrightarrow \mathbb{C}$. Det innebär att
- $\langle \mathbf{x} | \mathbf{x} \rangle > 0$ för $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$,
 - $\langle \mathbf{x} | \mathbf{y} \rangle = \overline{\langle \mathbf{y} | \mathbf{x} \rangle}$,
 - $\langle \mathbf{x} | \mathbf{y}_1 + \mathbf{y}_2 \rangle = \langle \mathbf{x} | \mathbf{y}_1 \rangle + \langle \mathbf{x} | \mathbf{y}_2 \rangle$
 - $\langle \mathbf{x} | a\mathbf{y} \rangle = a\langle \mathbf{x} | \mathbf{y} \rangle$.
- (b) $C[0, 1]$ med inre produkt $\langle f | g \rangle = \int_0^1 \overline{f(t)}g(t) dt$.
- (c) För $\mathbf{x}$ och $\mathbf{y}$ i ett reellt vektorrum har vi att $0 \leq |\mathbf{x} + t\mathbf{y}|^2 = \langle \mathbf{x} + t\mathbf{y} | \mathbf{x} + t\mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{x} | \mathbf{x} \rangle + 2t\langle \mathbf{x} | \mathbf{y} \rangle + t^2\langle \mathbf{y} | \mathbf{y} \rangle$ för alla t . Det innebär att diskriminanten för andragradspolynomet måste vara högst noll, dvs $|\mathbf{x}|^2|\mathbf{y}|^2 \geq |\langle \mathbf{x} | \mathbf{y} \rangle|^2$. Detta ger Cauchy-Schwartz olikhet, dvs $|\langle \mathbf{x} | \mathbf{y} \rangle| \leq |\mathbf{x}||\mathbf{y}|$.

DEL III – AVANCERADE PROBLEM

6. Låt $\mathbb{F}_q$ vara kroppen med q element där q är en primtalspotens. Bestäm antalet matriser i $M_{m,n}(\mathbb{F}_q)$ som har rang 1 för positiva heltal m och n . **(4 p)**

Lösningsförslag. En matris av rang ett kan skrivas som $A = \mathbf{x}\mathbf{y}^T$ där $\mathbf{x} \in \mathbb{F}_q^n$ och $\mathbf{y} \in \mathbb{F}_q^m$ är nollskilda vektorer. Det finns $(q^n - 1)(q^m - 1)$ val av sådana par, men en omskalning av $\mathbf{x}$ med en faktor a och $\mathbf{y}$ med en faktor a^{-1} ger samma matris för alla nollskilda a i $\mathbb{F}_q$. Därför finns det $(q^n - 1)(q^m - 1)/(q - 1)$ matriser av rang 1 i $M_{m,n}(\mathbb{F}_q)$.

Svar. Det finns $(q^n - 1)(q^m - 1)/(q - 1)$ matriser av rang 1 i $M_{m,n}(\mathbb{F}_q)$.

7. För en en $n \times n$ -matris A kan vi bilda en $2n \times 2n$ -matris B genom

$$B = \begin{bmatrix} A & I \\ -I & A \end{bmatrix}.$$

Visa att minimalpolynomet $q_B(x)$ är en faktor av $q_A(x+i)q_A(x-i)$ för alla $A \in M_{n,n}(\mathbb{R})$, där $q_A(x)$ är minimalpolynomet för A . **(4 p)**

Lösningsförslag. Vi kan konjugera med matrisen

$$Q = \begin{bmatrix} I_n & I_n \\ iI_n & -iI_n \end{bmatrix}$$

och får

$$Q^{-1}BQ = \begin{bmatrix} A + iI_n & 0 \\ 0 & A - iI_n \end{bmatrix}$$

För $p(x)$ är ett polynom som uppfyller att $p(A) = 0$ får vi därmed att

$$\begin{aligned} p(B + iI_{2n})p(B - iI_{2n}) &= \begin{bmatrix} p(A + 2iI_n) & 0 \\ 0 & p(A) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p(A) & 0 \\ 0 & p(A - 2iI_n) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} p(A + 2iI_n) & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & p(A - 2iI_n) \end{bmatrix} = 0. \end{aligned}$$

Eftersom minimalpolynomet för A uppfyller att $q_A(A) = 0$ och minimalpolynomet för B delar alla polynom $p(x)$ som uppfyller $p(B) = 0$, drar vi slutsatsen att $q_B(x)$ delar $p_A(x+i)p_A(x-i)$.

8. Matrisgruppen $SU_2(\mathbb{C})$ består av all unitära 2×2 -matriser med determinant 1. Bestäm ett delrum $V \subseteq M_{2,2}(\mathbb{C})$ sådant att $\exp(V) = SU_2(\mathbb{C})$. **(4 p)**

Lösningsförslag. Det är känt att $\exp(iX)$ är unitär om X är Hermiteisk. Hermiteiska matriser är ortogonalt diagonaliserbara med reella egenvärden. För att $\det \exp(iX) = 1$ måste summan av egenvärdena vara noll. Låt

$$V = \{X \in M_{2,2}(\mathbb{C}) : \operatorname{tr}(X) = 0 \text{ och } (iX)^\dagger = iX\} = \operatorname{Span} \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{bmatrix} \right\}.$$

Vi har nu att $\exp(V) \subseteq SU_2(\mathbb{C})$. Det återstår att visa att varje unitär matris A med determinant 1 ligger i bilden. Efter ett ortogonalt koordinatbyte kan vi utgå från att A är en diagonalmatris på formen

$$A = \begin{bmatrix} \exp(i\theta) & 0 \\ 0 & \exp(-i\theta) \end{bmatrix}$$

och vi har att

$$\exp \left(\begin{bmatrix} i\theta & 0 \\ 0 & -i\theta \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} \exp(i\theta) & 0 \\ 0 & \exp(-i\theta) \end{bmatrix} = A$$

och

$$\begin{bmatrix} i\theta & 0 \\ 0 & -i\theta \end{bmatrix} \in V.$$

Svar. $V = \{X \in M_{2,2}(\mathbb{C}) : \operatorname{tr}(X) = 0 \text{ och } (iX)^\dagger = iX\} = \operatorname{Span} \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{bmatrix} \right\}.$

9. Beräkna matriserna

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{och} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Visa att Moore-Penrose-inversen av A ges av

$$A^+ = \frac{1}{2}A^\dagger - \frac{1}{6}B^\dagger$$

(4 p)

Lösningförslag. Eftersom $B^\dagger B$ och $A^\dagger A$ är symmetriska matriser som kommuterar så finns en gemensam egenbas $\mathcal{B}$ för $\mathbb{R}^6$. På samma sätt har $BB^\dagger$ och $AA^\dagger$ en gemensam egenbas $\mathcal{C}$ för $\mathbb{R}^4$. Om vi använder dessa för singularvärdesuppdelning får vi

$$\Sigma_A = \begin{bmatrix} \sqrt{6} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{2} & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{och} \quad \Sigma_B = \begin{bmatrix} \sqrt{24} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Vi har att $\Sigma_{A^+} = \Sigma_A^+$ och

$$\Sigma_A^+ = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \sqrt{6} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{6}}{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\Sigma_A^\dagger - \frac{1}{6}\Sigma_B^\dagger.$$

Ett alternativ är att använda en sats ur materialet om singularvärdesuppdelning och pseudoinverser som säger att A^+ är den unika lösningen till de fyra ekvationerna

$$AXA = A, \quad XAX = X, \quad (XA)^\dagger = XA, \quad \text{och} \quad (AX)^\dagger = AX$$

Vi kan beräkna alla dessa produkter och se att den givna matrisen uppfyller dessa.

Ett tredje alternativ är att beräkna singularvärdesuppdelningen av A , men det kräver en användning av Gram-Schmidt för att hitta en ortogonal bas för egenrummen av dimension 3 till $AA^\dagger$ och $A^\dagger A$.