



**SF1683 Differentialekvationer och transformmetoder HT22, del 1**  
**Övningstentamen 1**

För full poäng på en uppgift krävs att lösningen är väl presenterad och lätt att följa. Det innebär speciellt att införda beteckningar ska definieras, att den logiska strukturen tydligt beskrivs i ord eller symboler och att resonemangen är väl motiverade och tydligt förklarade. Lösningar som allvarligt brister i dessa avseenden bedöms med högst två poäng.

---

DEL I – GRUNDLÄGGANDE PROBLEM

1. Differentialekvationen

$$y' = \frac{2xy}{x^2 - y^2}, \quad y = y(x),$$

är en homogen första ordningens ekvation. Hitta den allmänna lösningen till ekvationen. **(4 p)**

2. Bestäm lösningen till initialvärdesproblemet

$$\begin{cases} x'(t) = 2x(t) + 8y(t) \\ y'(t) = -x(t) - 2y(t) \end{cases}, \quad \begin{cases} x(0) = 2 \\ y(0) = -1 \end{cases}.$$

(Ledning: matrisen  $\begin{pmatrix} 2 & 8 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$  har komplexa egenvärden  $m = \pm 2i$ .)

**(4 p)**

3. Ekvationen

$$x^2 y'' + x(x-2)y' + (2-x)y = 0, \quad y = y(x)$$

har en lösning  $y_1(x) = x$ . Använd detta för att bestämma den allmänna lösningen till ekvationen. **(4 p)**

---

DEL II – AVANCERADE PROBLEM

4. Den homogena ekvationen

$$x^2 y'' + xy' + (x^2 - \frac{1}{4})y = 0$$

har två lösningar

$$y_1(x) = x^{-1/2} \cos x, \quad y_2(x) = x^{-1/2} \sin x.$$

Använd metoden med variation av parametrar för att hitta den allmänna lösningen till ekvationen

$$x^2 y'' + xy' + (x^2 - \frac{1}{4})y = x^{3/2}.$$

**(4 p)**

5. Det autonoma systemet

$$\begin{cases} x' = y^3 - x^3 \\ y' = -2xy^2 - 4x^2y - 2y^3 \end{cases}$$

för  $(x, y) = (x(t), y(t))$  har en kritisk punkt i origo. Visa att denna kritiska punkt är asymptotiskt stabil genom att hitta en lämplig Lyapunovfunktion. **(4 p)**

6. Differentialekvationen

$$xy'' + y = 0, \quad y = y(x),$$

har en reguljär singulär punkt vid  $x = 0$ . Använd en ansats med en serie av Frobeniustyp för att hitta en lösning till ekvationen. För detta ska du ange den rekursionsrelation som ger koefficienterna i serien samt beräkna minst 4 nollskiljda termer.

Visa att denna serieansats inte kan ge en andra linjärt oberoende lösning (du behöver heller inte bestämma en andra lösning). Bestäm konvergensraden för den lösning du har hittat. **(4 p)**

---