



Lösningsförslag till tentamen
den 19 december 2024

DEL I – GRUNDLÄGGANDE PROBLEM

1. (a) Definera vad som menas med att $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ är kontinuerlig i (a, b) . (1 p)
(b) Låt

$$f(x) = \begin{cases} c \frac{\sin x}{x} - 1, & -1 \leq x < 0 \\ d, & x = 0 \\ \arctan \frac{1}{x}, & 0 < x \leq 1 \end{cases}$$

För vilka c och d är f kontinuerlig $(-1, 1)$? Motivera ditt svar. (3 p)

Lösningsförslag.

- a) f är kontinuerlig i (a, b) om f är kontinuerlig i varje $x_0 \in (a, b)$.
 f är kontinuerlig i $x_0 \in (a, b)$ om $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$.

- b) i alla $x_0 \in (-1, 0) \cup (0, 1)$ f är sammansättning av elementära funktioner så är f kontinuerlig i x_0 enligt satsen i häftet.

f ska vara kontinuerlig i 0 om

$$\lim_{x \rightarrow 0-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0+} f(x) = f(0). \quad (*)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0-} \left(c \frac{\sin x}{x} - 1 \right) = c \lim_{x \rightarrow 0-} \frac{\sin x}{x} - 1 = c - 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0+} \arctan \left(\frac{1}{x} \right) = \frac{\pi}{2} \quad \left(\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\sin x}{x} = 1 \text{ enligt satsen} \right)$$

Från $(*)$ det följer att f är kont. i $x_0 = 0$ om

$$c - 1 = \frac{\pi}{2} = f(0) = d, \text{ dvs. } c = \frac{\pi}{2} + 1 \text{ och } d = \frac{\pi}{2}$$

2. Låt

$$f(x) = \frac{x}{\ln|x|}$$

- (a) Vad är definitionsmängd till f ? Beräkna eventuella asymptoter. (1 p)
 (b) Bestäm stationära punkter och avgör i vilka intervaller f avtagande och växande. (2 p)
 (c) Skissa grafen för f . (1 p)

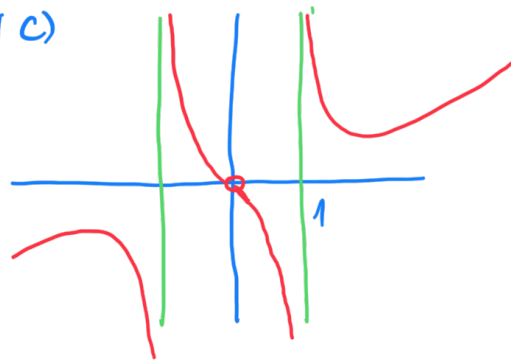
Lösningförslag.

Först observerar vi att $f(-x) = \frac{-x}{\ln|-x|} = -\frac{x}{\ln|x|} = -f(x)$ □
 dvs. f är symmetrisk m.a.p. origo. Så vi fortsätter analys bara för $x \in (0, \infty)$, sedan använder vi symmetri.

a) $D_f = (-\infty, -1) \cup (-1, 0) \cup (0, 1) \cup (1, \infty)$ (c)

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \cdot \frac{1}{\ln|x|} = 0^- \quad (0^+); \quad \lim_{x \rightarrow 1^-} x \cdot \frac{1}{\ln|x|} = -\infty \quad (x \rightarrow 1^+)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} x \cdot \frac{1}{\ln|x|} = +\infty \quad (x \rightarrow 1^-); \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\ln x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\frac{1}{x}} = +\infty \quad (x \rightarrow -\infty) \text{ L'Hospital}$$

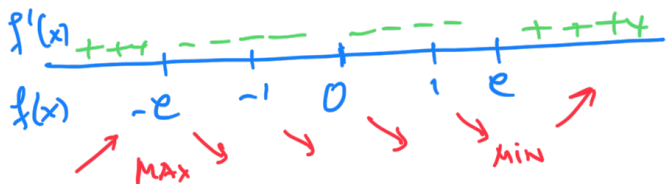


Linjerna $x=1$ och $x=-1$ är vertikala asymptoter

b) $f'(x) = \left(\frac{x}{\ln x}\right)' = \frac{\ln x - x \cdot \frac{1}{x}}{(\ln x)^2} = \frac{\ln x - 1}{(\ln x)^2}, x > 0$

$f'(x) = \left(\frac{x}{\ln(-x)}\right)' = \frac{\ln(-x) - x \cdot \frac{1}{(-x)} \cdot (-1)}{(\ln(-x))^2} = \frac{\ln(-x) - 1}{(\ln(-x))^2}, x < 0$

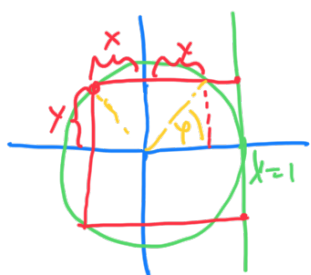
$$\Rightarrow \begin{cases} f'(x) = 0 \Leftrightarrow \\ \ln|x| = 1 \Leftrightarrow \\ |x| = e \Leftrightarrow \\ x = \pm e \end{cases}$$



f är växande i $(-\infty, -e)$ och (e, ∞)
 f är avtagande i $(-e, -1)$, $(-1, 0)$, $(0, 1)$ och i $(1, e)$

3. Bestäm största möjliga arean av en rektangel som har två horn på linjen $x = 1$ och dem två andra på cirkeln $x^2 + y^2 = 1$. (4 p)

Lösningsförslag. □



$$\varphi \in [0, \pi/2]$$

$$x = \cos \varphi$$

$$y = \sin \varphi$$

$$\frac{1}{2} A(\varphi) = x \cdot y + y \cdot 1 = \cos \varphi \sin \varphi + \sin \varphi$$

Vi Maximerar funktionen

$$H(\varphi) = \cos \varphi \sin \varphi + \sin \varphi$$

$$H'(\varphi) = -\sin \varphi \cdot \sin \varphi + \cos \varphi \cdot \cos \varphi + \cos \varphi$$

$$= -(1 - \cos^2 \varphi) + \cos^2 \varphi + \cos \varphi$$

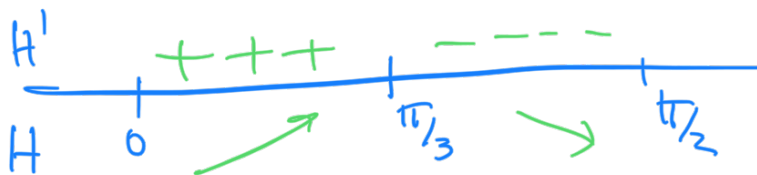
$$= 2\cos^2 \varphi + \cos \varphi - 1 = 0$$

$$\Rightarrow \cos \varphi = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{4} = \frac{-1 \pm \sqrt{9}}{4} = \begin{cases} \frac{1}{2} \\ -1 \end{cases}$$

$$\arccos \frac{1}{2} = \pi/3$$

När φ går från 0 till $\pi/3$, $\cos \varphi$ minskar från 1 till $1/2$, så är $H'(\varphi) > 0$. När φ går från $\pi/3$ till $\pi/2$, minskar $\cos \varphi$ från $1/2$ till 0 så är $H' < 0$.

Så vi har:



Därför har vi att $\pi/3$ är lokalt max. av H

Vi beräknar nu

(och därför lokalt max punkt för $A(\varphi) = 2 \cdot H(\varphi)$)

$$A(0) = 0$$

$$A(\pi/3) = 2 \left(\cos \varphi \sin \varphi + \sin \varphi \right) = 2 \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = \frac{\sqrt{3}}{2} + \sqrt{3} = \frac{3}{2}\sqrt{3}.$$

$$A(\pi/2) = 2 \cdot 1 = 2.$$

$$\frac{\sqrt{3} \cdot 3}{2} \approx \frac{1.7 \cdot 3}{2} \approx \frac{5.1}{2} > 2 \quad \text{dvs. största möjliga arean är } \frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

4. Bestäm om följande är konvergent eller divergent. Motivera ditt svar.

(a) $\int_1^{\infty} \frac{\ln(x+1)}{x^3} dx$

(2 p)

(b) $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}}$

(2 p)

Lösningsförslag.

□

(a) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(x+1)}{x} = 0 \Rightarrow \frac{\ln(x+1)}{x} < 1$ för $x > M$

$$\int_1^{\infty} \frac{\ln(x+1)}{x^3} dx = \int_1^M \frac{\ln(x+1)}{x^3} dx + \int_M^{\infty} \frac{\ln(x+1)}{x^3} dx$$

den här integralen är inte generaliserad, den är bestämd integral dvs. det är något reellt tal.

$\int_M^{\infty} \frac{\ln(x+1)}{x^3} dx$ är konvergent enligt jämförelsesats I för att $\frac{\ln(x+1)}{x^3} < \frac{1}{x^2}$ och $\int_M^{\infty} \frac{dx}{x^2}$ är

konvergent enligt satsen.

b) $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}} = \int_0^{1/2} \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}} + \int_{1/2}^1 \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}}$

$\int_{1/2}^1 \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}} = \left\{ \begin{array}{l} \text{Substitution: } 1-x=u \\ -dx=du \\ x=1/2 \Rightarrow u=1/2; x=1 \Rightarrow u=0 \end{array} \right\} = \int_{1/2}^0 \frac{-du}{\sqrt{(1-u)u}} = \int_0^{1/2} \frac{du}{\sqrt{u(1-u)}}$

Det följer att $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}} = 2 \int_0^{1/2} \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}}$, om $\int_0^{1/2} \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}}$ är konvergent.

Nu visar vi att $\int_0^{1/2} \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}}$ är konvergent enligt jämförelsesats II,

när närligen $\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\frac{1}{\sqrt{x(1-x)}}}{\frac{1}{\sqrt{x}}} = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{1}{\sqrt{1-x}} = 1$, och $\int_0^{1/2} \frac{dx}{\sqrt{x}}$ konvergerar, därför konvergerar $\int_0^{1/2} \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}}$.

5. En kemisk reaktion beskrivs av differentialekvationen

$$y' = k(1-y)(3-y)x$$

där k är en positiv konstant och y är en funktion av reel variabel x . Bestäm den lösning som uppfyller $y(0) = 0$. Hur förändras lösningen då $k \rightarrow \infty$? (4 p)

Lösningsförslag. □

Ekvationen är separabel:

$$\frac{dy}{k(1-y)(3-y)} = x dx$$

$$\int \frac{dy}{(1-y)(3-y)} = \frac{1}{2} \int \frac{dy}{1-y} - \frac{1}{2} \int \frac{dy}{3-y} = -\frac{1}{2} \int \frac{d(1-y)}{1-y} + \frac{1}{2} \int \frac{d(3-y)}{3-y} =$$

(Partialbräkkuppdelning: $\frac{1}{(1-y)(3-y)} = \frac{A}{1-y} + \frac{B}{3-y} = \frac{A(3-y) + B(1-y)}{(3-y)(1-y)}$)

$$\Rightarrow 3A + B = 1 \quad \text{od} \quad -A - B = 0 \Rightarrow B = -A \Rightarrow 3A + (-A) = 1 \Rightarrow 2A = 1$$

$$\Rightarrow A = \frac{1}{2} \\ \Rightarrow B = -\frac{1}{2}$$

$$= -\frac{1}{2} \ln|1-y| + \frac{1}{2} \ln|3-y| = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{3-y}{1-y} \right|$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2k} \ln \left| \frac{3-y}{1-y} \right| = \int x dx = \frac{x^2}{2} + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow \left| \frac{3-y}{1-y} \right| = e^{kx^2} \cdot e^{C \cdot 2k}$$

$$\Rightarrow \frac{3-y}{1-y} = \pm e^{kx^2} \cdot e^{C \cdot 2k} \Rightarrow \frac{3-y}{1-y} = C_1 e^{kx^2}, \quad C_1 \in \mathbb{R}$$

$C_1 = C_1(k)$

$$\Rightarrow 3-y = C_1 e^{kx^2} - y \cdot C_1 e^{kx^2}$$

$$3 - C_1 e^{kx^2} = y(1 - C_1 e^{kx^2}) \Rightarrow y = \frac{3 - C_1 e^{kx^2}}{1 - C_1 e^{kx^2}}$$

$$\Rightarrow y(0) = \frac{3 - C_1}{1 - C_1} = 0 \Rightarrow \boxed{C_1 = 3}$$

$$\Rightarrow \text{Lösningen: } y = \frac{3 - 3e^{kx^2}}{1 - 3e^{kx^2}}$$

$\rightarrow 0, \text{ för } vx \rightarrow \infty$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{3 - 3e^{kx^2}}{1 - 3e^{kx^2}} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{3e^{-kx^2} - 3}{1 \cdot e^{-kx^2} - 3} = 1$$

$\rightarrow 0, \text{ för } vx \rightarrow \infty$

DEL II – AVANCERADE PROBLEM

6. Låt $E = \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}, n \neq 0\}$. Låt f vara funktion:

$$f = \begin{cases} 1, & x \in E \\ 0, & x \notin E \end{cases}$$

Bevisa att f är integrerbar över $[0,1]$ (använd definitionen av integrerbarhet). Vad är värdet av $\int_0^1 f(x)dx$? Motivera ditt svar. (6 p)

Lösningsförslag. □

Vi använder definitionen av integrerbarhet från läppis. Täthet av $\mathbb{Q}$ implicerar att varje undertrappa är ≤ 0 . Därför, supremum av integraler av alla undertrappor är 0, för att 0-funktionen är en undertrappa.

För varje $n \in \mathbb{N}$, låt $\varepsilon = \frac{1}{n}$

Välj ut $\frac{1}{k}$ med längden ε^2

för alla $k = 1, 2, 3, \dots, n$.

Definiera $\psi_n(x) = \begin{cases} 1, & x \in I_k, k=1, \dots, n \\ 0, & \text{annars.} \end{cases}$

Då är $\psi_n(x)$ en övertrappa för f och

$$\int_0^1 \psi_n(x) dx = \varepsilon^2 \cdot n = \frac{1}{n^2} \cdot n = \frac{1}{n} \rightarrow 0$$

$\Rightarrow$ infimum av $\int_0^1 \psi(x) dx$ över alla övertrappor

är ≤ 0 . och är större än supremum av $\int_0^1 \psi(x) dx$ över

alla undertrappor, som vi redan vet är 0. Detta implicerar att $\sup \int_0^1 \psi dx = \inf \int_0^1 \psi dx = 0 \Rightarrow$ enligt definitionen $\int_0^1 f dx = 0$.

7. (a) Formulera och bevisa analysens huvudsats. (4 p)

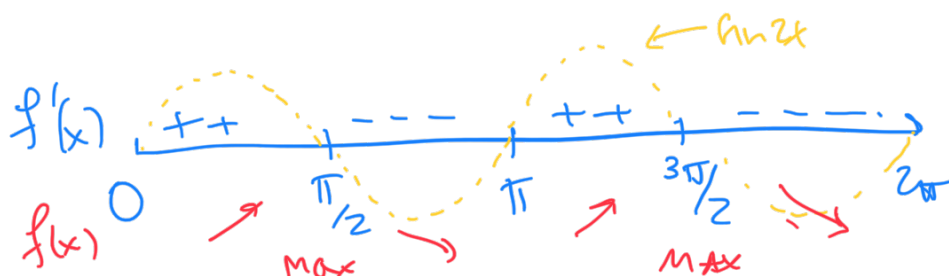
(b) För vilket x antar $f(x) = \int_0^x e^{-t^3} \sin(2t) dt$, $0 \leq x \leq 2\pi$, sitt största värde? Ange även största värdet (som en integral). (2 p)

Lösningförslag. □

(a) Häfter

$$(b) f'(x) = e^{-x^3} \sin 2x \quad , \quad x \in (0, 2\pi]$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x \in \{0, \pi/2, \pi, 3\pi/2, 2\pi\}$$



$$f(\pi/2) = \int_0^{\pi/2} e^{-t^3} \sin 2t \, dt$$

$$f(3\pi/2) = \int_0^{3\pi/2} e^{-t^3} \sin 2t \, dt$$

$$f(3\pi/2) - f(\pi/2) = \int_{\pi/2}^{3\pi/2} e^{-t^3} \sin 2t \, dt =$$

$$\int_{\pi/2}^{\pi} e^{-t^3} \sin 2t \, dt + \int_{\pi}^{3\pi/2} e^{-t^3} \sin 2t \, dt =$$

↑
Variabelbyte:
 $u = t - \pi$

↑
Variabelbyte:
 $u = t - \pi$

$$= \int_{-\pi/2}^0 e^{-(u+\pi)^3} \sin 2(u+\pi) \, du + \int_0^{\pi/2} e^{-(u+\pi)^3} \sin 2(u+\pi) \, du =$$

$$\stackrel{u = -v}{=} \int_0^{\pi/2} e^{-(-v+\pi)^3} \underbrace{\sin 2(-v+\pi)}_{= \sin 2v} \, dv + \int_0^{\pi/2} e^{-(u+\pi)^3} \underbrace{\sin 2(u+\pi)}_{= \sin 2u} \, du = \int_0^{\pi/2} \underbrace{\left(-e^{-(-v+\pi)^3} + e^{-(v+\pi)^3} \right)}_{< 0} \sin 2v \, dv < 0$$

$$\begin{aligned} &-(v+\pi)^3 + (-v+\pi)^3 < 0 \\ &-(v+\pi)^3 < (-v+\pi)^3 \\ &-(v+\pi) < (-v+\pi) \\ &-v-\pi < -v+\pi \quad \checkmark \\ &\quad \downarrow \\ &e^{-(-v+\pi)^3} > e^{-(v+\pi)^3} \\ &\quad \downarrow \\ &1 > e^{-(-v+\pi)^3 + (v+\pi)^3} \\ &\quad \downarrow \\ &-e^{-(-v+\pi)^3} + e^{-(v+\pi)^3} < 0 \end{aligned}$$

$\Rightarrow f(3\pi/2) < f(\pi/2) \rightarrow f$ antar största värde i $\pi/2$

8. (a) Antag att $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ är en serie av positiva reella tal, sådan att $\lim_{k \rightarrow \infty} (a_k)^{1/k} = L < 1$. Bevisa

att $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ är konvergent. (2 p)

(b) Antag att $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ är en serie av positiva reella tal, sådan att $\lim_{k \rightarrow \infty} (a_k)^{1/k} = L > 1$. Bevisa

att $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ är divergent. (2 p)

(c) Undersök för vilka reella tal $x \geq -2$ är serien $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(x+2)^k}{k}$ konvergent. (2 p)

Lösningförslag. □

(a) $\lim_{k \rightarrow \infty} a_k^{1/k} = L < 1 \rightarrow$ för $\varepsilon > 0$ s.a. $L + \varepsilon < 1$ det finns $K_0 > 0$ s.t.a

$$a_k^{1/k} < L + \varepsilon < 1 \text{ för alla } k > K_0.$$

$$\Rightarrow a_k < (L + \varepsilon)^k \text{ för alla } k > K_0.$$

$L + \varepsilon < 1 \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} (L + \varepsilon)^k$ är en konvergent geometrisk serie ✓

$\Rightarrow$ Enligt jämförelsesatsen $\sum_{k=K_0}^{\infty} a_k$ är också konvergent. $\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} a_k$ är konvergent.

(b) Samma argument som ovan utan att vi använder

$$(a_k)^{1/k} > L - \varepsilon > 1 \text{ gäller för något } \varepsilon \text{ och alla } k > K_1 = K_1(\varepsilon)$$

$$a_k > (L - \varepsilon)^k \text{ och } \sum_{k=1}^{\infty} (L - \varepsilon)^k \text{ är en divergent geometrisk serie för att } L - \varepsilon > 1.$$

Enligt jämförelsesatsen det följer att $\sum_{k=K_1}^{\infty} a_k$ är divergent och så är $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$.

$$(c) \text{ Låt } a_k = \frac{(x+2)^k}{k}. \quad \sqrt[k]{a_k} = \frac{x+2}{\sqrt[k]{k}} \rightarrow x+2 \text{ då } k \rightarrow \infty$$

Om $x+2 < 1$ då är serien konvergent enligt (a), dvs $-2 < x < -1$

Om $x+2 > 1$ dvs. $x > -1$, då är serien divergent enligt (b).

Om $x = -1 \Rightarrow x+2 = 1$ och serien är $\sum \frac{1}{k}$ som är divergent enligt Satsen. Om $x = -2$ serien är 0 $\Rightarrow$ konv.