

SK1104 Klassisk fysik

Lösningsförslag till tentamen

Måndagen den 11 mars, 2024, 14:00-16:30

Del A - 1p per deluppgift

1a) Eftersom vi alltid ska räkna från källpunkt till fältpunkt, är det lämpligt att låta $\hat{r}$ vara en enhetsvektor som pekar åt vänster längs med förbindelselinjen mellan laddningarna. Enligt Coulombs lag är den totala kraften på laddning q_1

$$\vec{F}_{tot} = \vec{F}_{21} + \vec{F}_{31} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{q_1 q_2}{r_{21}^2} + \frac{q_1 q_3}{r_{31}^2} \right] \hat{r}$$

Insättning av värden ger att

$$\vec{F}_{tot} = \frac{10^{-18}}{4\pi \cdot 8,854 \cdot 10^{-12}} \left[\frac{-8,0 \cdot 4,0}{0,0080^2} + \frac{-8,0 \cdot (-6,5)}{0,0120^2} \right] \hat{r} = -1,2 \text{ mN } \hat{r}$$

Kraften på q_1 är således 1,2 mN riktad åt höger i figuren.

b) Med de givna strömriktningarna, blir ekvationen för den vänstra maskan

$$\check{V} - \frac{1}{j\omega C_1} \check{I}_1 - R_2 \check{I}_1 - R_1 \check{I}_1 + R_2 \check{I}_2 = 0$$

och ekvationen för den högra maskan blir

$$-\frac{1}{j\omega C_2} \check{I}_2 - R_3 \check{I}_2 - j\omega L \check{I}_2 - R_2 \check{I}_2 + R_2 \check{I}_1 = 0$$

c) Den spänning som induceras i sekundärspolen är

$$\varepsilon = -M \frac{di_1}{dt} = -M \frac{d}{dt} [I_{1,max} \cdot \sin(\omega t)] = -\omega M I_{1,max} \cos(\omega t)$$

där $I_{1,max} = 3,50 \text{ A}$ och $\omega = 100\pi \text{ rad/s}$. Detta betyder i sin tur att det går en ström genom motståndet som är

$$i_2(t) = \frac{\varepsilon}{R} = -\frac{\omega M I_{1,max}}{R} \cos(\omega t)$$

Den medeleffekt som utvecklas i motståndet blir således

$$P = \int_0^{2\pi} i(t)v(t)dt = \frac{1}{2} I_{2,max} V_{2,max} = \frac{\omega^2 M^2 I_{1,max}^2}{2R}$$

insättning av värden ger att medeleffekten är

$$P = \frac{(100\pi)^2 \cdot (120 \cdot 10^{-3})^2 \cdot 3,50^2}{2 \cdot 25} \text{ W} = 348 \text{ W}$$

Del B - 4p per uppgift

2. Det finns tre kapacitanser i problemet och dessa ligger mellan plattorna. Låt C_{12} vara kapacitansen mellan platta 1 och 2, C_{23} vara kapacitansen mellan platta 2 och 3 samt C_{34} vara kapacitansen mellan platta 3 och 4. Låt vidare arean vara A och det konstanta avståndet mellan plattorna vara d . Vi har således att:

$$C_{12} = \frac{\epsilon A}{d} \quad ; \quad C_{23} = \frac{\epsilon_r \epsilon_0 A}{d} \quad ; \quad C_{34} = \frac{\epsilon A}{d}$$

Vidare ser vi att alla dessa kapacitanser är parallellkopplade med varandra (spänningsskillnaden är $V_{ab} = 40$ V mellan alla plattor). Detta betyder att ersättningskapacitansen för hela kretsen är

$$C_{tot} = C_{12} + C_{23} + C_{34}$$

vilket ger att den totala laddningen som är fördelad över plattorna är

$$Q_{tot} = C_{tot} V_{ab} = \left[\frac{\epsilon_0 A}{d} + \frac{\epsilon_r \epsilon_0 A}{d} + \frac{\epsilon_0 A}{d} \right] V_{ab} = (2 + \epsilon_r) \frac{\epsilon_0 A}{d} V_{ab}$$

Insättning av värden ger att

$$Q_{tot} = (2 + 3,4) \cdot \frac{8,854 \cdot 10^{-12} \cdot 15 \cdot 10^{-4}}{5,0 \cdot 10^{-3}} \cdot 40 \text{ C} = 0,57 \text{ nC}$$

Anta att laddningen på platta 1 är Q . Då följer omedelbart av symmetrin i problemet att laddningen på platta 4 är $-Q$. Detta betyder även att det finns en laddning $-Q$ på ovansidan av platta 2 och en laddning Q på undersidan av platta 3. Eftersom spänningen mellan platta 2 och 3 är densamma som mellan 1 och 2 (eller mellan 3 och 4), har vi att

$$V_{ab} = \frac{Q}{C_{12}} = \frac{Q_{23}}{C_{23}} \quad \Rightarrow \quad Q_{23} = \frac{C_{23}}{C_{12}} Q_{21} = \epsilon_r Q$$

Således gäller det att

$$Q_{tot} = 2Q + \epsilon_r Q = (2 + \epsilon_r)Q \quad \Rightarrow \quad Q = \frac{Q_{tot}}{2 + \epsilon_r}$$

Insättning av värden ger då att

$$Q = \frac{0,57}{2 + 3,4} \text{ nC} = 0,11 \text{ nC} \quad \text{samt} \quad Q_{23} = 3,4 \cdot 0,11 \text{ nC} = 0,36 \text{ nC}$$

De totala laddningarna på vardera plattan blir således

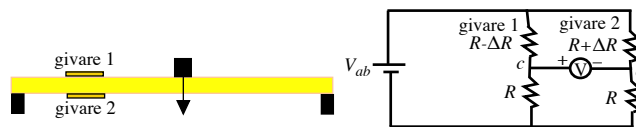
Platta 1: + 0,11 nC

Platta 2: - 0,11 - 0,36 nC = - 0,47 nC

Platta 3: 0,11 + 0,36 nC = 0,47 nC

Platta 4: - 0,11 nC

3. För att beräkna töjningen, behöver vi först bestämma ΔR . I det fall som visas i figuren, kommer givare 1 att tryckas ihop och få en mindre resistans, $R - \Delta R$, och givare 2 kommer att töjas ut och få en högre resistans, $R + \Delta R$. Detta ger att den elektriska kretsen ser ut som nedan:



Den spänning som avläses av voltmeteren är $V_{cd} = V_c - V_d$, där potentialerna V_c och V_d kan beräknas via spänningsdelning, vilket ger att

$$V_c = \frac{R}{R + R - \Delta R} V_{ab} \quad ; \quad V_d = \frac{R}{R + R + \Delta R} V_{ab}$$

Potentialskillnaden blir då

$$V_{cd} = \left[\frac{R}{2R - \Delta R} - \frac{R}{2R + \Delta R} \right] V_{ab} = \left[\frac{R(2R + \Delta R) - R(2R - \Delta R)}{4R^2 - \Delta R^2} \right] V_{ab}$$

Eftersom $V_{cd} \ll V_{ab}$ i denna uppkoppling, måste det även gälla att $\Delta R \ll R$ och vi kan då försumma termen ΔR^2 i nämnaren. Detta ger att

$$V_{cd} = \frac{\Delta R}{2R} V_{ab} = \frac{1}{2} K \varepsilon V_{ab} \quad \Rightarrow \quad \varepsilon = \frac{2V_{cd}}{KV_{ab}}$$

Insättning av värden ger slutligen att

$$\varepsilon = \frac{2 \cdot 0,252 \cdot 10^{-3}}{2 \cdot 49} = 6,3 \cdot 10^{-6}$$

4. a) Rakt ovanför den magnetiska nordpolen har vi att $x = 0$, $y = 0$ och $z = R$, där R är Jordens radie. Insättning i de givna ekvationerna ger att

$$B_x = 0 \quad ; \quad B_y = 0 \quad ; \quad B_z = \frac{M(3R^2 - R^2)}{R^5} = \frac{2M}{R^3}$$

På motsvarande sätt får för den magnetiska ekvatorn där $x = R$, $y = R$ och $z = 0$ att

$$B_x = 0 \quad ; \quad B_y = 0 \quad ; \quad B_z = \frac{M(3 \cdot 0 - R^2)}{R^5} = \frac{-M}{R^3}$$

Insättning av värden ger följande absolutbelopp av det magnetiska fältet i de båda fallen:

$$B_{Nordpolen} = \frac{2 \cdot (-8 \cdot 10^{15})}{(6,0 \cdot 10^6)^3} \text{ T} = -74 \mu\text{T} \quad ; \quad B_{Ekvatorn} = 37 \mu\text{T}$$

b) Den magnetiska energin som finns lagrad i ett magnetfält ges av

$$U = \int_V \frac{B^2}{2\mu_0} dV$$

där V är volymen. Enligt uppgiften ska vi beräkna den energi som finns lagrad ovanför jord ytan, dvs. när $r > R = 6,0 \cdot 10^6$ m. Vi ser vidare att absolutbeloppet av det magnetiska fältet varierar ganska lite över Jordens yta, så låt oss därför för enkelhets skull anta att det har sfärisk symmetri och ett absolutvärde som

är medelvärde av värdet vid polerna och vid ekvatorn. Detta ger att fältets radiella beroende approximativt kan tecknas som

$$B(r) = \frac{1,5M}{r^3}$$

vilket ger att den magnetiska energin

$$U = \frac{1}{2\mu_0} \int_R^\infty \frac{1,5^2 M^2}{r^6} \cdot 4\pi r^2 dr = \frac{2\pi \cdot 1,5^2 M^2}{\mu_0} \int_R^\infty \frac{dr}{r^4} = \frac{2\pi \cdot 1,5^2 M^2}{3\mu_0 R^3}$$

där integralen är i radiell ledd och tas över sfäriska element $4\pi r^2$ med ungefärligen konstant absolutvärde av magnetfältet. Insättning av värden ger att

$$U = \frac{2\pi \cdot 1,5^2 \cdot (-8 \cdot 10^{15})^2}{3 \cdot 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot (6,0 \cdot 10^6)^3} \text{ J} = 1,1 \cdot 10^{18} \text{ J}$$