

Lösningssförslag

---

Tentamen 20.10.2023

---

---

---

---





**Lösningsförslag till tentamen  
den 20 oktober 2023**

DEL I – GRUNDLÄGGANDE PROBLEM

1. (a) Beräkna  $y(2)$  då  $y(1) = 9$  och  $xy' + y \ln y = 0$ , då  $x > 0$ . **(3 p)**  
(b) Låt  $y(x)$  beteckna en lösning av ekvationen  $xy' + y \ln y = 0$ . Undersök om graf av  $y(x)$  har en horisontell asymptot. **(1 p)**

**Lösningsförslag.**  $xy' + y \ln y = 0$ ,  $x > 0$  då har vi att

$$\frac{y'}{y \ln y} = -\frac{1}{x}$$

$$\frac{y'}{y \ln y} = -\frac{1}{x}, \text{ sedan beräknar vi primitiv:}$$

$$\int \frac{y'}{y \ln y} dx = -\int \frac{1}{x} dx$$

$$\int \frac{y'}{y \ln y} dx = -\int \frac{1}{x} dx$$

$$\int \frac{d(\ln y)}{\ln y} = -\int \frac{1}{x} dx \text{ (där använder vi att } \frac{y'}{y \ln y} dx = \frac{dy}{y \ln y} \text{ och } d(\ln y) = \frac{dy}{y} \text{.) Sedan}$$

$$\ln |\ln y| = \ln |x|^{-1} + C, C \in \mathbb{R}$$

$$|\ln y| = e^C |x|^{-1}$$

$$|\ln y| = C_1 |x|^{-1}, C_1 > 0$$

$$\ln y = \pm C_1 |x|^{-1}, C_1 > 0$$

$$\ln y = C_2 |x|^{-1}, C_2 \neq 0$$

$$y = e^{\frac{C_2}{|x|}}, C_2 \neq 0$$

Sedan observerar vi att om  $y(x) = 1$ ,  $x > 0$  är konstant funktion som har derivatan 0 och uppfyller  $xy' + y \ln y = 0$ .

Därför, allmänna lösning (då  $x > 0$ ) är

$$y(x) = e^{\frac{C_3}{x}}, C_3 \in \mathbb{R}.$$

Om  $x = 1$  och  $y = 9$  då har vi att

$$9 = e^{C_3}, \text{ så beräknar vi } C_3 = \ln 9.$$

Därför den partikulär lösning som uppfyller  $y(1) = 9$  är:  $y(x) = e^{\frac{\ln 9}{x}}$ . För  $x = 2$  då blir det  $y(2) = e^{\frac{\ln 9}{2}} = e^{\ln 3} = 3$ .

(b) Vi beräknar gränsvärde:

$\lim_{x \rightarrow \infty} y(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} e^{\frac{C_3}{x}} = 1$ , för att  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0$ ,  $e^0 = 1$ , och exponential funktionen är kontinuerlig.

Därför graf av lösningen har linjen  $y = 1$  som en horisontell asymptot.

□

2. Bestäm ett polynom  $P(x)$  av högst tredje graden, sådant att funktionen

$$f(x) = \begin{cases} \sin x, & x < 0 \\ P(x), & 0 \leq x \leq 1 \\ \ln x, & x > 1 \end{cases}$$

blir deriverbar. Motivera ditt svar.

(4 p)

**Lösningsförslag.**

□

Vi söker  $P(x) = a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ , så behöver vi att bestämma koefficienter  $a_0, a_1, a_2, a_3$ .

Om  $f$  ska vara deriverbar i 0 då måste  $f$  vara kontinuerlig i 0 (satsen i häftet) dvs att  $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ .

Från definitionen av  $f$ :  $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \sin x = 0$

Och  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} P(x) = a_0$ . Därför  $\boxed{a_0 = 0}$ .

Om  $f$  ska vara deriverbar i 0, enligt definitionen av derivatan,  $f$  måste också uppfylla:

$\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(h) - f(0)}{h}$ . Från definitionen av  $f$ ,

har vi att  $\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{\sin h}{h} = 1$  (enligt satsen i häftet)

På andra sidan har vi att

$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{a_3 h^3 + a_2 h^2 + a_1 h}{h} = a_1$ .

Därför:  $\boxed{a_1 = 1}$

Med samma metod analyserar vi  $f$  i punkt  $x=1$ :

Om  $f$  ska vara deriverbar i 1, då måste  $f$  vara kontinuerlig i 1 dvs att

$$\lim_{x \rightarrow 1-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1+} f(x), \text{ enligt definitionen av kontinuitet.}$$

Från definitionen av  $f$  :

$$\lim_{x \rightarrow 1+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1+} \ln x = 0, \text{ och}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1-} P(x) = a_3 + a_2 + a_1.$$

$$\text{Därför } a_3 + a_2 + a_1 = 0$$

$$a_3 + a_2 + 1 = 0$$

$$\boxed{a_3 + a_2 = -1}$$

Om  $f$  ska vara deriverbar i 1, enligt definitionen av derivatan,  $f$  uppfyller

$$\lim_{h \rightarrow 0-} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0+} \frac{f(1+h) - f(1)}{h}$$

Från definitionen av  $f$  :

$$\lim_{h \rightarrow 0-} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0-} \frac{a_3(h+1)^3 + a_2(h+1)^2 + h + 1 - a_3 - a_2 - 1}{h}$$

$$= 3a_3 + 2a_2 + 1.$$

På andra sidan har vi att

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(h+1) - f(1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{\ln(h+1)}{h} = 1$$

(Enligt Satsen  
i häftet, om  
Standardgräns-  
värde)

$$\text{Därför : } 3a_3 + 2a_2 + 1 = 1$$

$$\Downarrow$$

$$3a_3 + 2a_2 = 0$$

$$\Downarrow$$

$$a_3 = -\frac{2a_2}{3}$$

Vi vet redan att  $a_3 + a_2 = -1$ ,

därför  $-\frac{2a_2}{3} + a_2 = -1$

$$-2a_2 + 3a_2 = -3$$

$$a_2 = -3 \Rightarrow a_3 = 2$$

Svar:  $P(x) = 2x^3 - 3x^2 + x$

3. Undersök konvergens/divergens av:

(a)  $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2+x-2}$  och  $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x^2+x-2}$ .

(2 p)

(b)

$$\sum_{n=2}^{n=\infty} \frac{\arctan n}{n^2+n-2}.$$

(2 p)

**Lösningsförslag.**

□

(a)  $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2+x-2}$  är konvergent om och endast om

$\int_1^2 \frac{dx}{x^2+x-2}$  är konvergent och  $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x^2+x-2}$  är konvergent.

Först undersök vi konvergens av  $\int_1^2 \frac{dx}{x^2+x-2}$ :

$$\lim_{x \rightarrow 1+} \frac{\frac{1}{x^2+x-2}}{\frac{1}{x-1}} = \lim_{x \rightarrow 1+} \frac{\frac{1}{(x+2)(x-1)}}{\frac{1}{x-1}} = \frac{1}{3} > 0$$

Enligt definitionen av generaliserade integral av Typ II:

$$\begin{aligned} \int_1^2 \frac{dx}{x-1} &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 1+} \int_{\varepsilon}^2 \frac{dx}{x-1} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 1+} \int_{\varepsilon}^2 \frac{d(x-1)}{x-1} = \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 1+} \ln|x-1| \Big|_{\varepsilon}^2 = \lim_{\varepsilon \rightarrow 1+} \ln 1 - \ln|\varepsilon-1| = \infty \end{aligned}$$

därför  $\int_1^2 \frac{dx}{x-1}$  är divergent, vilken implicerar  
(enligt jämförelsessatsen II) det  $\int_1^2 \frac{dx}{x^2+x-2}$  också  
är divergent. Detta medför att  $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2+x-2}$  är divergent.

Nästa undersöker vi konvergens av  $\int_2^{\infty} \frac{dx}{x^2+x-2}$ .

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x^2+x-2}}{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{x^2+x-2} =$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{1 + \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2}} = 1.$$

Enligt jämförelsessatsen II,  $\int_2^{\infty} \frac{dx}{x^2+x-2}$

är konvergent om och endast om

$\int_2^{\infty} \frac{dx}{x^2}$  är konvergent. Enligt satsen

i häftet  $\int_2^{\infty} \frac{dx}{x^2}$  är konvergent.

(b) För  $n \geq 2$ ,  $\frac{\arctan n}{n^2+n-2} > 0$  så får vi

Använda satser för positiva serier.:

$$\frac{\arctan(n)}{n^2+n-2} \leq \frac{\pi/2}{n^2+n-2} \dots \dots \dots \textcircled{x}$$

Enligt satsen om sambandet mellan konvergens av serier och konvergens av integraler, har vi att

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2+n-2} \text{ är konv. } \iff \int_2^{\infty} \frac{dx}{x^2+x-2}$$

är konvergent. I del (a) visade vi att

$$\int_2^{\infty} \frac{dx}{x^2+x-2} \text{ är konvergent. Då är}$$
$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2+n-2} \text{ också konvergent.}$$

Detta medför att  $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\pi/2}{n^2+n-2}$  också

är konvergent. Från olikheten  $\otimes$

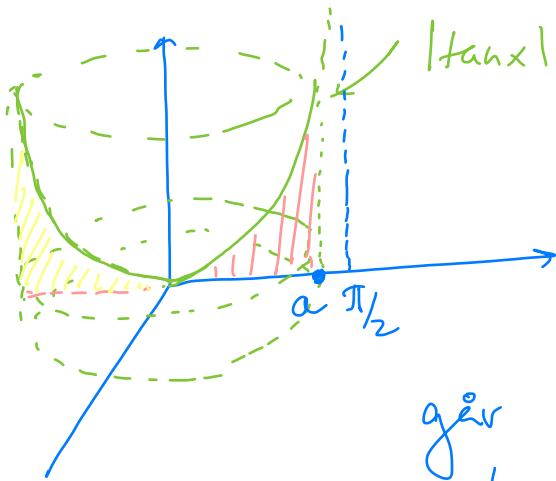
och jämförelsessatsen I för serier,

har vi konvergens av  $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\arctan n}{n^2+n-2}$

4. Låt  $a$  vara ett reell tal i intervall  $(0, \frac{\pi}{2})$ . Låt  $V(a)$  beteckna volymen av den kropp som fås då området mellan kurvan  $y = |\tan x|$  och  $x$ -axeln, för  $-a \leq x \leq a$ , roteras ett varv kring  $y$ -axeln. Beräkna  $V(a)$  och  $\lim_{a \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} V(a)$ . (4 p)

↖ typo! ska vara  $x$ !  
**Lösningsförslag.**

□



Enligt formel från häftet:

$$Vol = 2\pi \int_0^a x \tan x \, dx$$

Primitive funktion  $\int x \tan x \, dx$   
 ger inte att beräknas genom  
 elementära funktioner!

5. Låt

$$f(x) = \begin{cases} (x+2)e^x, & -4 \leq x < 0 \\ x^2 - 4x + 2 & 0 \leq x \leq 3 \end{cases}$$

(a) Undersök om funktionen  $f$  har något största och minsta värde och bestäm i så fall dessa. **(3 p)**

(b) Är  $f$  deriverbar? Motivera ditt svar. **(1 p)**

**Lösningsförslag.**

□

$$\begin{aligned} (a) \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} (x+2)e^x = 2 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} (x^2 - 4x + 2) = 2 \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)} \right\} \Rightarrow f \text{ är kontinuerlig i } x=0.$$

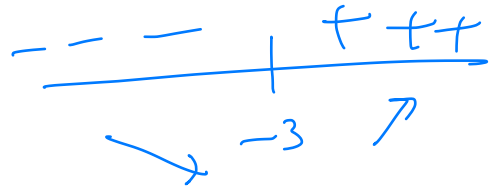
Om  $x \neq 0$ , då är (enligt definition av  $f$ )  $f$  också kontinuerlig för att  $f$  är produkt av elementära funktioner.

Därför:  $f$  är kontinuerlig i det slutet intervall  $[-4, 3]$ . Enligt satsen i häftet ("Kontinuerlig funktion i ett slutet intervall, antar sina Minimum och maximum värden.

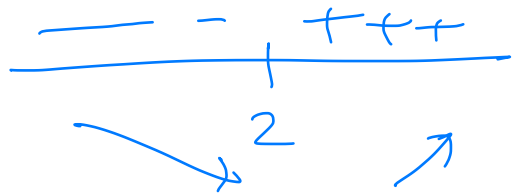
För att hitta max och min värde, först kontrollerar vi om  $f$  har lokala extrempunkter. De första kandidaterna är stationära punkter. Därför beräknar vi derivatan, i dessa punkter där derivatan finns:

$$((x+2)e^x)' = (x+3)e^x = 0 \Leftrightarrow \boxed{x=-3}$$

$$f(-3) = -e^{-3}$$

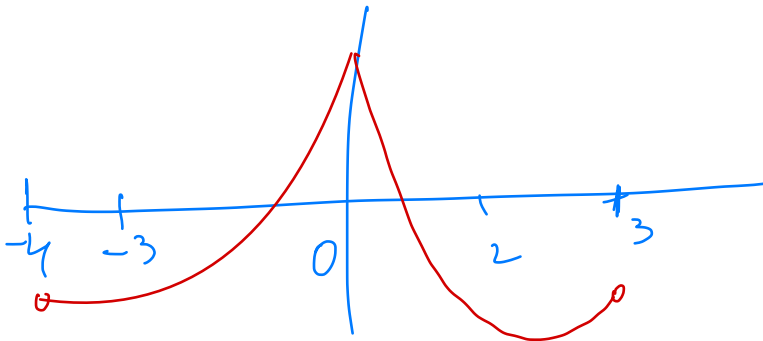


$$(x^2 - 4x + 2)' = 2x - 4 = 0 \Leftrightarrow \boxed{x=2}$$



$$f(2) = -2$$

graf av  $f$  ser ut som:



Nu samlar vi ihop alla kandidater  
för globalt minimum / maximum:

| $x$ | $f(x)$     |
|-----|------------|
| 2   | -2         |
| 0   | 2          |
| -4  | $-2e^{-4}$ |
| 3   | -1         |

Så från tabellen ser vi att

$$f_{\max} = 2 \quad \text{i punkt } x=0$$

$$f_{\min} = -2e^{-4} \quad \text{i punkt } x=-4$$

## DEL II – AVANCERADE PROBLEM

6. (a) Bevisa att om  $f(x)$  är kontinuerlig på  $[a, b]$  och  $f'(x) < 0$  på  $(a, b)$  så är  $f$  strängt avtagande på  $[a, b]$ . Stämmer det att om  $f$  är strängt avtagande på  $[a, b]$  och deriverbar på  $(a, b)$  så är  $f'(x) < 0$ ? Motivera ditt svar. (4 p)
- (b) Är  $f(x) = \frac{1}{x}$  strängt avtagande i sin definitionsmängd? Motivera ditt svar. (2 p)

Lösningsförslag. □

(a) Kolla i häftet

(b) Att vara strängt avtagande i en mängd  $D_f$

betyder att för alla  $x_1, x_2 \in D_f$ :

$x_1 < x_2$  implicerar att  $f(x_1) > f(x_2)$ .

För funktionen  $f(x) = \frac{1}{x}$  vi ser att

det finns  $x_1 = -1$  och  $x_2 = 1$

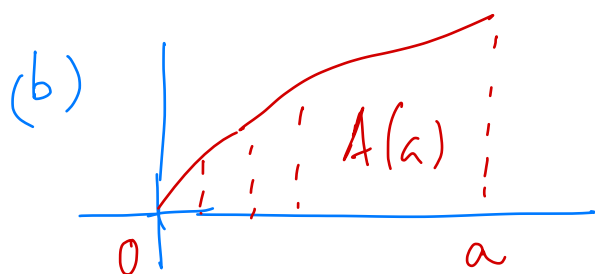
sådant att  $f(-1) = \frac{1}{-1} = -1 < 1 = \frac{1}{1} = f(1)$

därför  $f$  inte är strängt avtagande på  $D_f$ .

7. (a) Formulera och bevisa Analysens huvudsats. **(4 p)**  
 (b) Låt  $f: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  vara en kontinuerlig funktion. Låt  $A(a)$  beteckna arean mellan graf av  $f$  och  $x$ -axeln, där  $0 \leq x \leq a$ ,  $a > 0$ . Anta att  $A(a) = \arctan(a^2)$  för varje  $a > 0$ . Bestäm  $f$  och skissa graf af  $f$ . **(2 p)**

Lösningförslag. □

(a) Kolla i häftet.



$$A(a) = \arctan a^2$$

Enligt definitionen av integral:

$$A(a) = \int_0^a f(t) dt$$

Enligt analysens huvudsats:

$$\frac{d}{da} A(a) = \frac{d}{da} \int_0^a f(t) dt = f(a)$$

På andra sidan:

$$\frac{d}{da} A(a) = \frac{d}{da} \arctan(a^2) = \frac{1}{1+a^4} \cdot 2a$$

$$\text{Så: } f(a) = \frac{2a}{1+a^4}$$

För att skissa graf av  $f$ , observera vi att:

$$f(0) = 0$$

$$\lim_{a \rightarrow \infty} f(a) = \lim_{a \rightarrow \infty} \frac{2a}{1+a^4} = \lim_{a \rightarrow \infty} \frac{2}{\frac{1}{a} + a^3} = 0+$$

Också, för  $a > 0$  har vi att  $f(a) > 0$ .

$$f'(a) = \left( \frac{2a}{1+a^4} \right)' = \frac{2(1+a^4) - 2a \cdot 4a^3}{(1+a^4)^2}$$

$$f'(a) = \frac{2 - 6a^4}{(1+a^4)^2} = \frac{2(1-3a^4)}{(1+a^4)^2}$$

$$\begin{aligned} \text{Set } f'(a) &= 0 \Leftrightarrow 1 - 3a^4 = 0 \Leftrightarrow \\ 3a^4 &= 1 \Leftrightarrow a^4 = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

För att  $a > 0$ , den enda lösningen  
av  $a^4 = \frac{1}{3}$  är  $\frac{1}{\sqrt[4]{3}}$ .

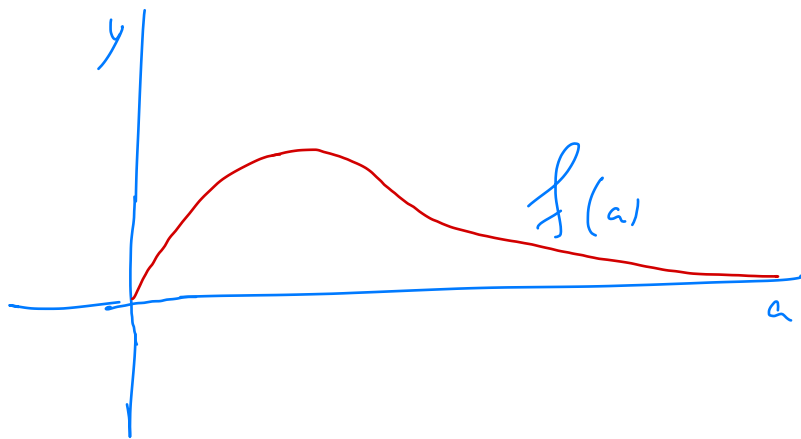
Tecken schema :  $f' \mid ++ \sqrt[4]{3} \dots$

Darfor:  $x = \frac{1}{\sqrt{3}}$  ist lokales Maxpunkt

Därför måste  $f$  vara konkar  
nära  $x = \frac{1}{\sqrt[4]{3}}$ .

För att  $f$  har horisontella  
asymptot  $y = 0$ ,  $f$  är konvex  
nära  $\infty$ . Detta medför  
existens av något inflexionspunkt  
mellan  $\frac{1}{\sqrt[4]{3}}$  och  $\infty$ .

Graf av  $f$ :



8. Anta att  $f$  är  $(n+1)$  gången deriverbar och att  $f^{(n+1)}$  är kontinuerlig. Låt  $a \in \mathbb{R}$  vara en punkt där  $f^{(n+1)}(a) \neq 0$ . Anta att det finns en funktion  $\theta : (-1, 1) \rightarrow (0, 1)$  sådant att  $f$  uppfyller

$$\textcircled{*} \quad \dots \quad f(a+h) = f(a) + hf'(a) + \dots + \frac{h^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(a) + \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(a + \theta(h)h).$$

Visa att

$$\lim_{h \rightarrow 0} \theta(h) = \frac{1}{n+1}.$$

(6 p)

*Tips. Använd Taylor formel med polynom av grad  $n$  och resttermen.*

*Obs.  $(-1, 1)$  och  $(0, 1)$  betecknar öppna intervaller i mängden  $\mathbb{R}$  av alla reella tal.*

**Lösningsförslag.**

□

Taylor formel med resttermen kring  $a$  är:  
(enligt satsen i häftet) :

$$\textcircled{**} \quad \dots \quad f(a+h) = f(a) + hf'(a) + \dots + \frac{h^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(a) + \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(a) + \frac{h^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\alpha)$$

där  $\alpha = \alpha(h)$  är mellan  $a+h$  och  $a$ .

Nu beräknar vi  $\textcircled{*} - \textcircled{**}$  :

$$0 = \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(a + \theta(h)h) - \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(a) - \frac{h^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\alpha(h))$$

$$\Rightarrow \frac{h^n}{n!} (f^{(n)}(a + \theta(h)h) - f^{(n)}(a)) = \frac{h^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\alpha(h))$$

$$\Rightarrow \frac{f^{(n)}(a + \theta(h)h) - f^{(n)}(a)}{h} = \frac{1}{n+1} f^{(n+1)}(\alpha(h))$$

$$\xRightarrow{\theta(h) \neq 0} \frac{f^{(n)}(a + \theta(h)h) - f^{(n)}(a)}{\theta(h) \cdot h} = \frac{1}{(n+1)\theta(h)} f^{(n+1)}(\alpha(h))$$

Vi vet att  $f$  är  $(n+1)$  gånger  
deriverbar, dvs.

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f^{(n)}(a+h) - f^{(n)}(a)}{h} = f^{(n+1)}(a).$$

Också,  $\theta$  är begränsad funktion  
därför  $\lim_{h \rightarrow 0} \theta(h) \cdot h = 0$  (enligt

Satsen i häftet.)

Därför:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f^{(n)}(a + \theta(h)h) - f^{(n)}(a)}{\theta(h)h} = f^{(n+1)}(a)$$

Vilken medför

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{(n+1)\theta(h)} f^{(n+1)}(a) = f^{(n+1)}(a)$$

Nu använder vi att  $f^{(n+1)}(a) \neq 0$ ,

$$\text{Så: } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{(n+1)\theta(h)} = 1$$

$$\text{Därför } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{\theta(h)} = n+1$$

$$\text{och } \lim_{h \rightarrow 0} \theta(h) = \frac{1}{n+1}$$