

Lösningssförslag till Tentamen i Modern Fysik (SH1014) 14.00-19.00, 2019-04-18, KTH, Stockholm

Betygskriterierna är följande:

A:36-40, B:32-35.5, C:28-31.5, D:24-27.5, E:20-23.5, Fx:18-19.5, F:0-17.5

1. Problem:

En fri väteatom befinner sig i tillståndet $(n, l, m_l, m_s) = (3, 1, -1, \frac{1}{2})$ när den de-exciterar till grundtillståndet och emitterar en foton.

a) Vilken våglängd får den emitterade fotonen? [2 p]

b) Väteatomen får en rekyl på grund av emissionen. Bestäm dess hastighet (riktning och fart). [3 p]

Lösning:

a) Vi kan använda Bohrmodellen för att räkna ut energin på den emitterade fotonen eftersom energin i fria atomer enbart bestäms av huvudkvanttalet n . Denna lyder: $E_n = -\frac{13.6}{n^2} \text{ eV}$. Fotonens energi ges alltså av $E_\gamma = E_3 - E_1 = -13.6 \left(\frac{1}{3^2} - \frac{1}{1^2} \right) = 12.09 \text{ eV}$. Fotonens våglängd blir då: $\lambda = \frac{hc}{E_\gamma} = 102.6 \text{ nm}$.

b) Rekylen kan vi beräkna genom att använda bevarandet av rörelsemängd.

$p_H + p_\gamma = 0$, alltså $p_H = -p_\gamma = -\frac{h}{\lambda}$. Vi kan direkt avgöra att det inte kommer bli relativistiska hastigheter och kan därför räkna klassiskt för väteatomen: $v_H = \frac{p_H}{m_H} = -\frac{h}{\lambda m_H} = -3.86 \text{ m/s}$, alltså i motsatt riktning mot fotonen.

2. Problem:

a) Visa att det relativistiska uttrycket för rörelseenergin E_k övergår i det klassiska uttrycket $E_k = \frac{1}{2}m_0v^2$ vid låga hastigheter. [3 p]

b) En elektron som har fått hastigheten $0.9c$ i en accelerator har en viss kinetisk energi, E_k . Hur många gånger högre blir E_k vid hastigheten $0.99c$? [1 p]

c) Hur stort relativt fel skulle man få om man räknade klassiskt i b)? [1 p]

Lösning:

a) Den relativistiska kinetiska energin ges av den totala energin minus viloenenergin, eller: $E_k = (\gamma - 1)m_0c^2$, där $\gamma = 1/\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$. Vid låga energier går v^2/c^2 mot noll

och vi kan använda en Taylor- (eller Maclaurin) utveckling: $f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots$. Detta ger för $E_k(v^2/c^2) = m_0c^2 \left(\frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2} + \frac{3}{8} \frac{v^4}{c^4} + \dots \right)$ och om vi betraktar små v kan vi förkasta alla termer utom den första, alltså får vi: $E_k = \frac{1}{2}m_0v^2$.

b) Om vi räknar relativistiskt får vi: $E_k^{\text{SR}}(0.90c) = 1.29mc^2$, $E_k^{\text{SR}}(0.99c) = 6.09mc^2$. Kvoten är 4.7.

Om vi räknar klassiskt får vi: $E_k^K(0.90c) = 0.41mc^2$, $E_k^K(0.99c) = 0.49mc^2$. Kvoten är 1.2.

Det relativa felet kan definieras på lite olika sätt, som kvoten mellan kvoterna $(4.7/1.2 = 3.9)$ eller som $\frac{4.7-1.2}{4.7} = 74\%$. Vi har inte varit petiga på hur svaret presenteras.

3. En partikel med massan m befinner sig i en endimensionell potential, $U(x)$. Partikelns vågfunktion kan skrivas:

$$\psi(x) = \begin{cases} Ax^4 e^{-ax} & \text{för } x > 0 \\ 0 & \text{för } x \leq 0 \end{cases}$$

- a) Normera vågfunktionen, dvs bestäm konstanten A . [1 p]
 b) Bestäm väntevärdet $\langle p^2 \rangle$. [3 p]
 c) Bestäm medelvärdet av partikelns kinetiska energi. [1 p]

Lösning:

a) Normering av vågfunktionen ger oss konstanten A genom: $1 = A^2 \int_0^\infty x^8 e^{-2ax} dx = \frac{A^2 8!}{(2a)^9}$. Vi får alltså att $A = \sqrt{\frac{(2a)^9}{8!}}$. Vidare utveckling blir mer meningsfull tillsammans med b och c.

b) Vi söker $\langle p^2 \rangle$, som vi får genom att låta rörelsemängdsoperatoren, $\hat{p} = -i\hbar \frac{d}{dx}$, verka i kvadrat: $\hat{p}^2 = -\hbar^2 \frac{d^2}{dx^2}$, alltså: $\langle p^2 \rangle = -\hbar^2 A^2 \int_0^\infty x^4 e^{-ax} \frac{d^2}{dx^2} (x^4 e^{-ax}) dx = -\hbar^2 A^2 \int_0^\infty x^6 e^{-2ax} (a^2 x^2 - 8ax + 12) dx = \frac{a^2 \hbar^2}{7}$

c) Medelvärdet på den kinetiska energin kan här ges av det klassiska uttrycket då vi inte har relativistiska hastigheter: $\bar{E}_k = \frac{\langle p^2 \rangle}{2m} = \frac{a^2 \hbar^2}{14m}$.

4. Wiens förskjutninglag är sambandet mellan frekvensen vid emissionsmaximum $\nu_{\max}$ och temperaturen T för en strålände svartkropp.

a) Härled Wiens förskjutninglag, så långt som det är analytiskt möjligt, från Plancks strålningslag. Uppskatta sedan numeriskt eller grafiskt proportionalitetskonstanten som anger relationen mellan frekvens för emissionsmaximum och temperaturen. [4 p]

b) Givet att solens spektrum har sitt emissionsmaximum vid våglängden 500 nm, bestäm solens ytemperatur. [1 p]

Lösning:

a) Vi söker en funktion som beskriver relationen mellan en svartkroppens temperatur och den maximala frekvensen den sänder ut. Detta kan vi ta fram genom att derivera Plancks strålningslag med avseende på frekvensen ν och sätta derivatan till noll:

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d}{d\nu}(I(\nu, T)) = \frac{d}{d\nu} \left(\frac{2h\nu^3}{c^2} \frac{1}{e^{\frac{h\nu}{k_B T}} - 1} \right) \\ &= \frac{2h\nu^2}{c^2} \frac{1}{\left(e^{\frac{h\nu}{k_B T}} - 1\right)^2} \left(3 \left(e^{\frac{h\nu}{k_B T}} - 1\right) - \frac{h\nu}{k_B T} e^{\frac{h\nu}{k_B T}} \right) \end{aligned}$$

Här kan vi definiera en ny variabel $x = \frac{h\nu}{k_B T}$ och vi söker sedan nollställena till ekvationen $3(e^x - 1) = xe^x$. Numerisk eller grafisk lösning ger $x \approx 2.8214$. Detta ger oss en relation mellan frekvens och temperatur som är: $\nu_{\max} = 2.84214 \frac{k_B T}{h} \approx 5.8 \cdot 10^{10} T$, där enheten för konstanten är Hz/K.

b) Givet en frekvens kan vi ta fram en temperatur, och den givna frekvensen var här angiven som den motsvarande våglängden $\lambda = 500$ nm. Vi får här $T = \frac{\nu}{5.8 \cdot 10^{10}} = \frac{c}{\lambda \cdot 5.8 \cdot 10^{10}} = 10000$ K.

Den uppmärksamma studenten märker nu att detta verkar högt skattat och detta beror på en miss i tentamenskonstruktionen. Vi valde tyvärr (av gammal vana) våglängdsmaximum som man får om man gör samma härledning av Wiens förskjutningslag i termer av våglängd. De två fördelningarna representerar dock två olika saker: det är antingen effekttäthet i våglängd eller effekttäthet i frekvens, och eftersom dessa är reciproka får de olika maxima. I tentamenlydelsen borde vi valt den våglängd som ger frekvensmaximum för 6000 K, vilket är 820 nm.

5. Problem:

Avståndet mellan två nukleoner i en atomkärna är ungefär $1.4 \cdot 10^{-15}$ m. Den japanske forskaren Hideki Yukawa förutsade redan 1935 att det existerar en virtuell partikel, en *meson*, som förmedlar den starka kraft som binder samman protonerna och neutronerna i atomärnan. Denna utbytespartikel skapas bara tillfälligt i partiklarnas växelverkan. Vi antar att mesonen rör sig med ljushastigheten, c , mellan de två nukleonerna och att den precis överlever tiden motsvarande sträckan mellan nukleonerna. Heisenbergs osäkerhetsrelation tillåter mesonen att existera under denna tid. Beräkna mesonens vilomassa. [5 p]

Lösning:

Vi kan börja med att konstatera att tiden, t , som mesonen behöver överleva är av storleksordningen $t = r/c$, där r är avståndet mellan två nukleoner och c är ljushastigheten. Vi kan nu använda oss Heisenbergs för att sätta en approximativ gräns för samtidig bestämning av energi och tid: $\Delta E \Delta t \approx \hbar$ och ersätta Δt med t ovan så att $t = r/c = \hbar/\Delta E$. Detta ger direkt: $\Delta E = \hbar c/r$. Denna osäkerhet i energi ΔE , motsvarar vilomassan hos partikeln som bildas. Vi har alltså: $m_\pi c^2 = \hbar c/r = \frac{4.1357 \cdot 10^{-15} \cdot 3 \cdot 10^8}{1.4 \cdot 10^{-15} \cdot 2\pi} \text{ eV} = \dots = 1.41 \cdot 10^8 \text{ eV} = 141 \text{ MeV}$. Vilomassan för mesonen uppskattas alltså med denna enkla metod till $m_\pi = 141 \text{ MeV}/c^2$, vilket stämmer bra med experimentellt uppmätta värden. Om man använder sambandet $\Delta E \Delta t \approx \hbar/2$ istället så blir resultatet förstås korrigerat med en faktor 2.

6. Problem:

a) Kraftkonstanten, k , för bindningen i CO-molekylen är 187 N/m. Bestäm energin (i enheten eV) mellan grundtillståndet och det första exciterade vibrationstillståndet. [3 p]

b) Är ljuset från övergången från den första exciterade vibrationsnivån till grundtillståndet *synligt*, *ultraviolett*, eller *infrarött*. Motivera svaret. [2 p]

Lösning:

Vi kan skriva upp uttrycket för vibrationsenergi i molekyler:

$$E_{\text{vib}} = \left(V + \frac{1}{2} \right) h\nu_0; \quad V = 0, 1, 2, 3, \dots$$
$$\nu_0 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{k/\mu}; \quad \mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}.$$

Vi ser att skillnaden mellan grundtillståndet och nästa energinivå, $\Delta E_{\text{vib}} = E_{V=1} - E_{V=0}$, är lika med $h\nu_0$. Med kända massor på kol och syre så beräknar vi den reducerade massan till: $\mu = \frac{12 \cdot 16}{12+16} [\text{u}] = 6.857 [\text{u}]$. Insatta värden på k , etc, ger nu:

$$\begin{aligned} \Delta E_{\text{vib}} &= h\nu_0 = \frac{6.62618 \cdot 10^{-34} [\text{J} \cdot \text{s}]}{2\pi} \sqrt{\frac{187 [\text{N/m}]}{6.857 \cdot 1.660566 \cdot 10^{-27} [\text{kg}]} } = \\ &= 1.35 \cdot 10^{-20} [\text{J}] = 8.4 \cdot 10^{-2} [\text{eV}]. \end{aligned}$$

Vi kan notera att denna energi är avsevärt mindre än tex energierna för väteatomens (synliga) Balmeriserie, där energiskillanderna ligger i storleksordningen några få eV, pga väteatomens jonsiationsenergi på 13.6 eV. Eftersom dessa vibrationsövergångar motsvarar avsevärt *mindre* energiskillnader än det synliga Balmerljuset så betyder det att våglängderna är avsevärt *längre* pga sambandet $\Delta E = hc/\lambda$. Ljus

med längre våglängd än synligt ljus kallas *infrarött*.

7. Problem:

Den brittiske astronomen Fred Hoyle föreslog 1953 att ett viktigt steg i den s.k. nukleosyntesen i stjärnor skulle kunna bestå i att tre alfapartiklar slås samman till en ^{12}C -atomkärna. Denna kärna kommer att bildas i ett exciterat tillstånd, vid en viss energi, E , över kärnans grundtillstånd. Hoyle förutsåg värdet på denna energi och hans överraskande idé visade sig senare stämma väl med experimentella data.

Antag att alfapartiklarna befinner sig i vila före reaktionen (detta är förstås inte sant i en stjärna, utan en förenkling i detta tal). Med hjälp av tabellvärden på experimentella massor, beräkna excitationenergin, E , i ^{12}C -atomkärnan. [5 p]

Lösning:

Den atomära massan för C-12 är exakt 12.0 u. För atomen helium-4 så är massan 4.002603 u. I reaktionen $3 \cdot {}^4\text{He} \rightarrow {}^{12}\text{C}$, så har vi 6 elektroner på vardera sidan, så Q -värdet blir korrekt om vi använder atomära massor:

$$Q = [3 \cdot m({}^4\text{He}) - m({}^{12}\text{C})] c^2 = (3 \cdot 4.002603 - 12) \cdot 931.502 \text{ [MeV]} = 7.27 \text{ [MeV]}.$$

Vi ser att Q -värdet blir 7.27 MeV. Eftersom inga andra partiklar än C-kärnan kan dela på denna energi, och eftersom rörelsemängden bevaras (C-12-kärnan står stilla) så blir detta värdet på den exciterade nivån i C-12-kärnan. Detta är förvisso en förenkling, eftersom alfapartiklarna behöver kinetisk energi för att övervinna Columbarriären, men vi fördjupar oss inte i det här.

8. Problem:

I ett acceleratorlaboratorium så har forskarna lyckats ta bort alla elektroner, utom en, från en blyatom. Denna blyjon har laddningen $+81e$ (där e är elektronladdningen) och befinner sig i sitt grundtillstånd. Man bestrålar sedan blyjonen med gammastrålning. En gammafoton, $E_\gamma = 662 \text{ keV}$, från en ^{137}Cs -källa, växelverkar medelst fotoelektrisk effekt med elektronen. Beräkna elektronens energi efter att den lämnat blyjonen. [5 p]

Lösning:

Från uppgiften så inser vi (om vi inte redan visste det) att en neutral blyatom har atomnumret $Z = 82$. Om alla elektroner utom en är borttagna så kan vi betrakta systemet som en *vätelik* atom. Då får vi (bindnings-)energin, E_n för grundtillståndet ($n = 1$):

$$E_{\text{bindning}} = E_n = \frac{-Z^2 \cdot 13.6 \text{ [eV]}}{n^2} = \frac{-82^2 \cdot 13.6 \text{ [eV]}}{1^2} = 91.4 \text{ [keV]}.$$

Det krävs alltså 91.4 keV för att frigöra elektronen från sin blykärna. Vid fotoelektrisk effekt så blir den resterande energin till rörelseenergi, E_e , för elektronen, dvs:

$$E_e = E_\gamma - E_{\text{bindning}} = 662 - 91.4 = 570.6 \text{ [keV]}.$$

Vi ser att elektronens kinetiska energi blir 571 keV.